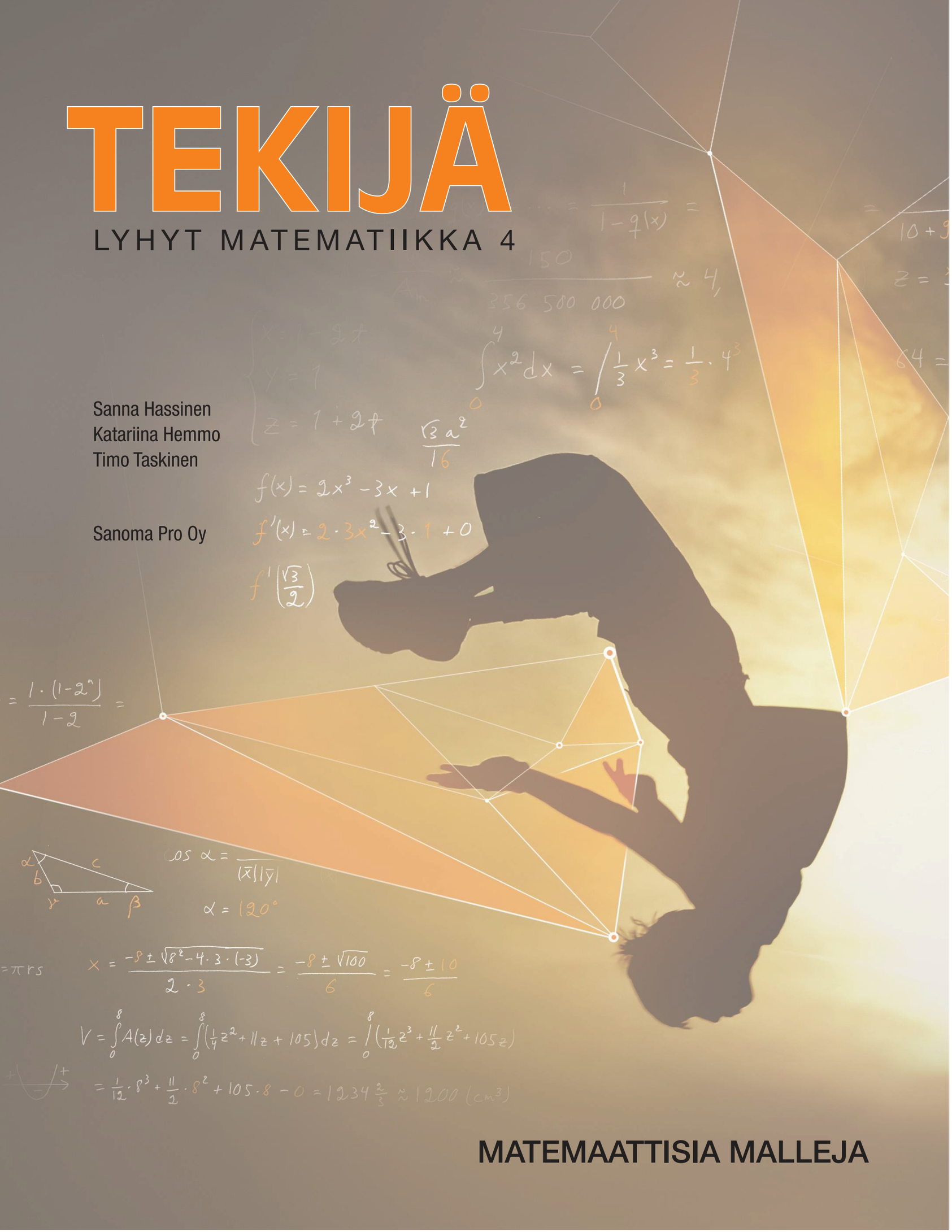
TEKIJÄ

LYHYT MATEMATIIKKA 4

Sanna Hassinen
Katariina Hemmo
Timo Taskinen

Sanoma Pro Oy



MATEMAATTISIA MALLEJA

Tiedustelut
Sanoma Pro Oy, Helsinki
puh. 020 391 000
sähköposti: asiakaspalvelu@sanomapro.fi

www.sanomapro.fi

Kustantaja: Sanoma Pro Oy
1.–2. painos, 2017

Tämä aineisto on digitaalinen rinnakkaisversio tuotteesta
Tekijä Lyhyt matematiikka 4 Matemaattisia malleja ISBN 978-952-63-4418-8

6 kk lisenssi ISBN 978-952-63-4538-3
48 kk lisenssi ISBN 978-952-63-4537-6

Toimitus: Sanna Niemelä
Ulkoasu: Liisa Holm
Taitto: Eija Högman
Piirrokset: Juho Niemelä
Valokuvat: Fotolia: 50 (thanksforbuying), 53 (zjk), 60 (iakovlev), 71 (Maren Winter), 124 (Chad McDermott), 126 (Vladimir Prusakov), 135 (StrangerView), 136 (Melpomene), 143 (Ilucia), 157 (cassis), 167 (flint01), 176 (nataba)
Mostphotos: 9, 33
Rodeo Finnish RF: 58 (Tero Sivula), 120 (Pedacom)
Shutterstock: 11 (DutchScenery), 17 (pixbox77), 47 (Accurate shot), 55 (Roman Babakin), 66 (Rawpixel.com), 69 (ballemans), 72 (Willyam Bradberry), 80 vas. (Vinne), 80 alh. (Jeff Feverston), 83 (Mari Jensen), 85 (Mike Richter), 94 (Anteromite), 96 (Vadim Sadovski), 102 (renkshot), 105 (Christian Musat), 106 (FotograFFF), 134 (Dmitry Kaminsky), 141 (Happy Art), 155 (dvande), 171 (tovovan), 173 (RedTC), 183 (SeDmi), 185 (azure1)

Kansi: Vaidas Bagonas, Sari Jeskanen

© Sanna Hassinen, Katariina Hemmo, Timo Taskinen ja Sanoma Pro Oy

Kopiointiehdot
Tämä teos on digitaalinen oppikirja, joka on suojattu tekijänoikeuslailla (404/61).

Sisällys

1 Lineaarinen malli **7**
1.1 Suora matemaattisena mallina 8
1.2 Suoran yhtälö 19
1.3 Yhdensuuntaisuus ja kohtisuoruus 35
1.4 Sovelluksia lineaarisesta mallista 47

2 Eksponentiaalinen malli **59**
2.1 Eksponenttifunktio 60
2.2 Eksponenttiyhtälön ratkaiseminen 74
2.3 Potenssiyhtälö 85
2.4 Sovelluksia 97

3 Lukujonot matemaattisena mallina **108**
3.1 Aritmeettinen ja geometrinen jono 109
3.2 Aritmeettinen summa 126
3.3 Geometrinen summa 136

4 Lisämateriaali **146**
4.1 Suuntakulma 146
4.2 Murtopotenssi 152
4.3 Briggsin logaritmi 155

5 Kertaus: Matemaattisia malleja **159**
5.1 Kurssin keskeiset asiat 160
5.2 Matemaattisia malleja 168
5.3 Monivalintatehtävät 181

Vastaukset **186**

Hakemisto **193**

Kirjan käyttäjälle

Tavoitteet

Matematiikan opetuksen ja erityisesti oppikirjan tärkeä tehtävä on, että opiskelija saa myönteisiä oppimiskokemuksia matematiikan parissa työskennellessään, oppii luottamaan omiin kykyihinsä, taitoihinsa ja ajatteluunsa sekä rohkaistuu kokeilevaan, tutkivaan ja keksivään oppimiseen.

Lukion opetussuunnitelma asettaa lyhyen matematiikan opetukselle monia tavoitteita. Opiskelijan on esimerkiksi osattava käyttää matematiikkaa jokapäiväisen elämän ja yhteiskunnallisen toiminnan apuvälineenä. Nopeasti muuttuvassa maailmassa täytyy pystyä vastaanottamaan ja analysoimaan viestimien matemaattisessa muodossa tarjoamaa informaatiota ja arvioimaan sen luotettavuutta.

Lukiolaisen on hankittava sellaisia matemaattisia tietoja, taitoja ja valmiuksia, jotka antavat riittävän pohjan jatko-opinnoille. Matemaattisten tietojen ja taitojen lisäksi on opittava käyttämään tarkoituksenmukaisia teknisiä apuvälineitä ja tietolähteitä.

Opetussuunnitelman mukaan kurssin ”Matemaattisia malleja” tavoitteena on, että opiskelija

- näkee reaalimaailman ilmiöissä säännönmukaisuuksia ja riippuvuuksia ja kuvaa niitä matemaattisilla malleilla
- tottuu arvioimaan mallien hyvyyttä ja käyttökelpoisuutta
- tutustuu ennusteiden tekemiseen mallien pohjalta
- osaa käyttää teknisiä apuvälineitä polynomi- ja eksponenttifunktion ominaisuuksien tutkimisessa sekä polynomi- ja eksponenttiyhtälöiden ratkaisussa sovellusongelmien yhteydessä.

Kirjan rakenne

Lyhyt Tekijä -sarjassa on monia ratkaisuja, jotka tukevat opiskelijaa opetussuunnitelman tavoitteiden saavuttamisessa.

- Jokaisen pääluvun alussa on kaavio, jossa esitellään keskeiset tavoitteet. Sen lisäksi kaaviossa kerrotaan, mitkä asiat opiskelijan tulisi hallita ilman apuvälinettä ja mitkä asiat on osattava apuvälineen kanssa.

Pohdinta

- Luvut alkavat pohdinnoilla. Niiden tarkoitus on johdatella tunnin aiheeseen.

- Kirjan jokaiseen esimerkkiin liittyy tehtäväosiossa vastaavantyyppinen tehtävä. Nämä tehtävät on selkeästi merkitty symbolilla. Tämä helpottaa esimerkiksi itsenäistä opiskelua.

- Vaativammat tehtävät on merkitty väripohjalla. Ne voivat olla joko laskintehtäviä tai ilman laskinta laskettavia tehtäviä.

Lisämateriaali: Suuntakulma s. 146

- Kurssiin liittyvä lisämateriaali on koottu omaksi pääluvuksi. Teoriaosassa on viittauksia tähän lukuun.

Matematiikan ylioppilaskokeessa osa tehtävistä ratkaistaan ilman teknistä apuvälinettä, osa teknisen apuvälineen kanssa. Apuvälineellä tarkoitetaan tietokonetta tai laskinta. Tämä jaottelu on otettu huomioon myös oppikirjassa.

- Osa esimerkeistä on ratkaistu ilman laskinta. Vastaavasti osa tehtävistä on tarkoitus ratkaista ilman mitään apuvälinettä.

- Esimerkit ja tehtävät, joiden ratkaisussa on tarkoitus käyttää laskinta tai tietokonetta, on merkitty omalla symbolilla.

Kun kirjan esimerkeissä ja tehtävissä viitataan laskimeen, tällä tarkoitetaan minkä tahansa tehtävän ratkaisemiseen sopivan teknisen apuvälineen käyttöä.

Laskimen tai muun apuvälineen käyttö

Luvuissa on huomioitu teknisen apuvälineen tarjoamat mahdollisuudet ohjelaatikoiden avulla. Niissä kerrotaan, millaisia toimintoja tehtävän ratkaisemisen avuksi esimerkiksi laskimista voi löytyä.

Aikataulusuunnitelma

	75 min	45 min
1 Lineaarinen malli		
1.1 Suora matemaattisena mallina	1	1–2
1.2 Suoran yhtälö	2	2
ELisämateriaali: 4.1 Suuntakulma		
1.3 Yhdensuuntaisuus ja kohtisuoruus	1–2	2
1.4 Sovelluksia lineaarisesta mallista	1–2	2
Eksponentiaalinen malli		
2.1 Eksponenttifunktio	1	1–2
2.2 Eksponenttiyhtälön ratkaiseminen	1	2
• Lisämateriaali: 4.3 Briggsin logaritmi		
2.3 Potenssiyhtälö	1	2
• Lisämateriaali: 4.2 Murtopotenssi		
2.4 Sovelluksia	1–2	2
• Lisämateriaali: 4.2 Murtopotenssi		
Lukujonot matemaattisena mallina		
3.1 Aritmeettinen ja geometrinen jono	2	2–3
3.2 Aritmeettinen summa	1–2	2
3.3 Geometrinen summa	1–2	2
Kertaus	1–2	2
Yhteensä	**14–20**	**22–25**

1 Lineaarinen malli

Tavoitteena on

- kerrata suureiden välinen lineaarinen riippuvuus
- oppia muodostamaan suoran yhtälö
- oppia tunnistamaan kuvaajan ja kulmakertoimen välinen yhteys
- oppia soveltamaan lineaarista mallia
- oppia tekemään ennusteita mallin avulla
- oppia käyttämään teknistä apuvälinettä suoran tutkimisessa ja sovellusongelmien ratkaisemisessa

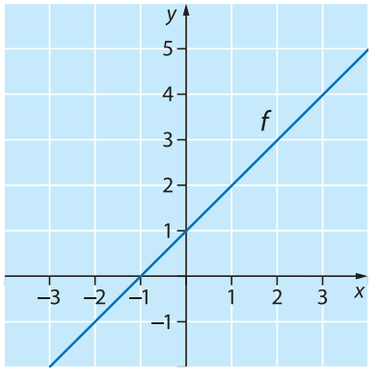
- Miten muodostetaan lineaarinen malli?
- Miten lineaarisen mallin pätevyyttä arvioidaan eli mitä arvoja muuttujat x ja y voivat saada?
- Miten määritetään ja lasketaan kulmakerroin?
- Miten määritetään suoran yhtälö?
- Miten voidaan tutkia, ovatko suorat
  – nousevia vai laskevia
  – yhdensuuntaisia
  – kohtisuorassa toisiaan vastaan?
- Miten lasketaan suoran ja koordinaattiakselien leikkauspisteet?

- Miten lasketaan suoran ja koordinaattiakselien leikkauspisteet?
- Miten voidaan laskea suoran yhtälön avulla
  – y, kun x tunnetaan
  – x, kun y tunnetaan
  – kuuluuko piste suoralle?
- Miten piirretään suora ja mitä kuvaajan avulla voidaan määrittää (graafisesti)?
- Miten laskimen avulla sovitetaan suora pistejoukkoon?

1.1 Suora matemaattisena mallina

Pohdinta 1

Koordinaatistoon on piirretty ensimmäisen asteen polynomifunktion f kuvaaja.



Päättele kuvaajan avulla

a) pisteiden puuttuva koordinaatti
$(0, __)$
$(2, __)$
$(__, 2)$
$(__, -1)$

b) funktion arvot $f(0)$ ja $f(2)$

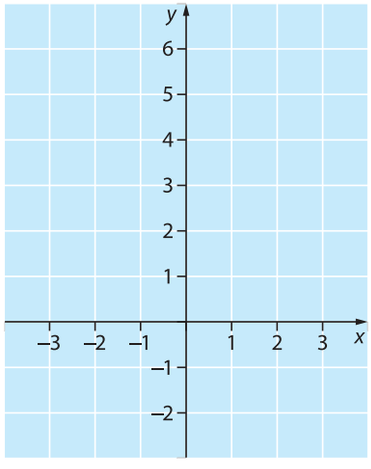
c) se muuttujan arvo, jolla $f(x) = 0$

d) epäyhtälön $f(x) > 0$ ratkaisu.

Pohdinta 2

Täydennä taulukko.

x	*y*
–1	–2
1	2
2	4
3	6
x	



a) Millä säännöllä y:n arvot muodostuvat? Kirjoita yhtälö.

b) Merkitse koordinaatistoon kaikki ne xy-tason pisteet, jotka toteuttavat edellisen yhtälön. Millainen kuvaaja muodostuu?

Tarkastellaan omenien hinnan ja ostetun kilomäärän riippuvuutta taulukon avulla, kun omenien kilohinta on 2,5 €.

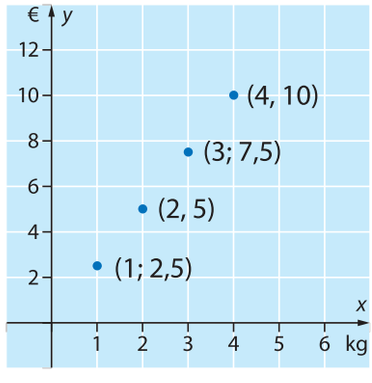
Määrä (kg)	Hinta (€)
1	2,5
2	$2{,}5 \cdot 2 = 5{,}0$
3	$2{,}5 \cdot 3 = 7{,}5$
4	$2{,}5 \cdot 4 = 10$
x	$2{,}5x$

Jos omenien määrää merkitään kirjaimella x (kg), omenien hinnan riippuvuutta määrästä voidaan kuvata lausekkeella $2{,}5x$. Laskujen suorittaminen on selkeämpää, jos lausekkeelle annetaan nimi, esimerkiksi f. Lauseketta voidaan merkitä siis

$$f(x) = 2{,}5x.$$

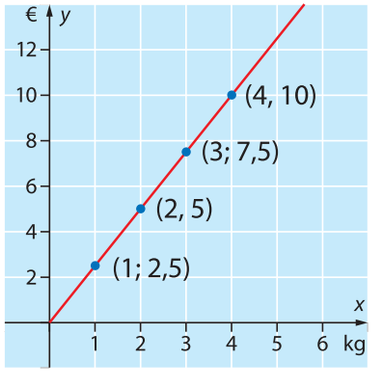
Funktiota f kutsutaan **ensimmäisen asteen polynomifunktioksi** eli **lineaariseksi funktioksi**. Jos funktion arvoa $f(x)$ eli hintaa merkitään kirjaimella y, saadaan pisteitä (x, y), jotka voidaan merkitä koordinaatistoon.

Määrä x	Hinta y
1	2,5
2	5,0
3	7,5
4	10
x	$2{,}5x$



Pisteiden koordinaatit toteuttavat yhtälön $y = 2{,}5x$.

Kun kaikki yhtälön toteuttavat xy-tason pisteet merkitään koordinaatistoon, saadaan pistejoukko, jonka kuvaaja on **suora**.



- *y*-akselille riippuva suure (hinta)
- *x*-akselille selittävä suure (se suure, mistä *y* riippuu eli määrä)

Suoran yhtälö on sääntö, jolla suureet *x* ja *y* riippuvat toisistaan.

Jos suureet x ja y riippuvat toisistaan **lineaarisesti** eli suoraviivaisesti, pisteet (x, y) asettuvat suoralle. Lineaarista riippuvuutta mallinnetaan **suoran yhtälön** avulla.

Mallin muodostamisen jälkeen voidaan arvioida sen pätevyyttä. Malli $y = 2{,}5x$ pitää paikkansa, kun ostettu määrä $x \geq 0$. Kuvaaja piirretään vain näillä x:n arvoilla.

Laskimen tai muun apuvälineen käyttö

Pisteiden piirtäminen

Opettele asettamaan pisteitä koordinaatistoon. Usein riittää kun ohjelmaan syöttää suoraan pisteen koordinaatit.

Suoran piirtäminen

Suora voidaan piirtää koordinaatistoon, kun suoran yhtälö tunnetaan. Selvitä omasta piirto-ohjelmastasi, miten saat suoran piirrettyä yhtälön avulla.

Pistejoukkoon sopivan suoran yhtälö saadaan piirtämällä pisteiden kautta suora ja etsimällä sopivalla toiminnolla suoran yhtälö näkyviin.

Jos halutaan piirtää suora näkyviin vain tietyllä välillä, voidaan tämä väli asettaa usein jo suoran yhtälöä syötettäessä.

Pisteiden koordinaattien etsiminen

Suoran pisteiden koordinaatit saadaan usein näkyviin jäljittämällä kuvaajaa tai syöttämällä suoraan *x*-koordinaatin arvo.

ESIMERKKI 1

Celsiusasteet (°C) riippuvat fahrenheitasteista (°F) lineaarisesti. Riippuvuutta voidaan mallintaa yhtälöllä $y = \frac{5}{9}x - \frac{160}{9}$, jossa x on lämpötila farenheitasteina ja y lämpötila celsiusasteina. Laske yhtälön avulla, kuinka monta

a) celsiusastetta on 50 °F

b) fahrenheitastetta on 0 °C.

RATKAISU

a) Sijoitetaan $x = 50$ (°F) riippuvuutta kuvaavaan yhtälöön.

$$y = \frac{5}{9} \cdot 50 - \frac{160}{9} = \frac{250}{9} - \frac{160}{9} = \frac{90}{9} = 10 \text{ (°C)}$$

b) Sijoitetaan $y = 0$ (°C) yhtälöön ja ratkaistaan vastaava farenheit-lukema x (°F).

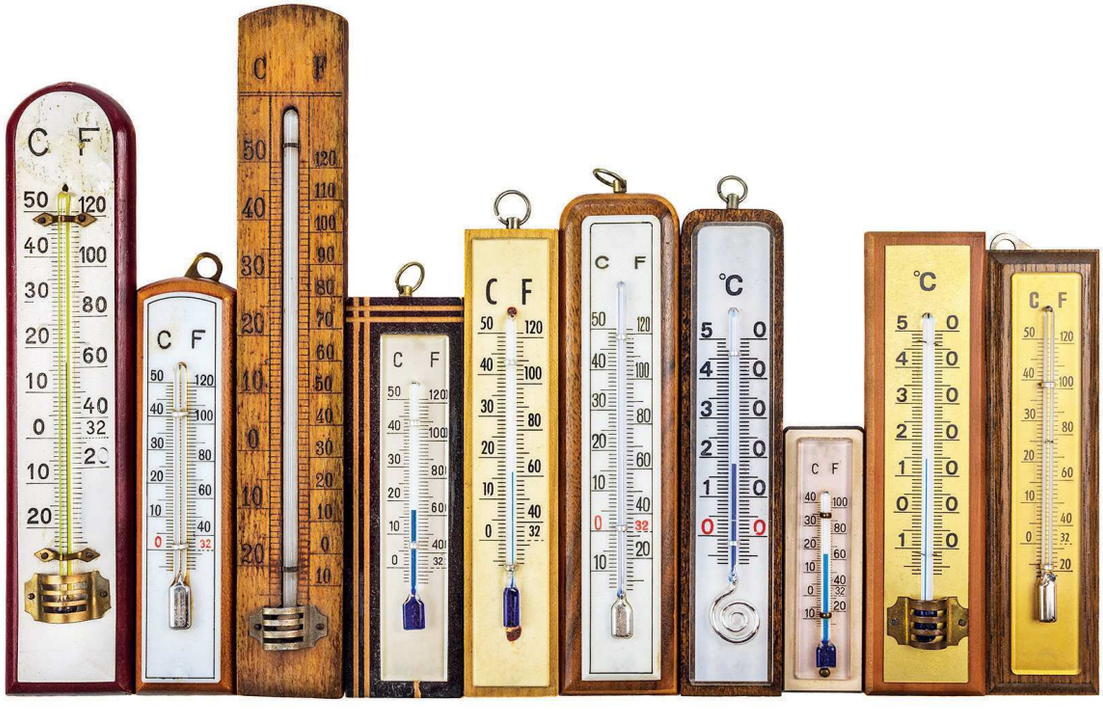
$$\frac{5}{9}x - \frac{160}{9} = 0 \qquad \big| \cdot 9$$

$$5x - 160 = 0$$

$$5x = 160 \qquad \big| : 5$$

$$x = 32 \text{ (°F)}$$

VASTAUS **a)** 10 °C **b)** 32 °F



ESIMERKKI 2

Sandra saa vanhemmiltaan lahjaksi puhelimen ja liittymän, jonka kuukausimaksu on 4,90 €. Kuukausimaksun lisäksi puhelut maksavat 0,13 €/min.

a) Mallinna kuukausittaisen puhelinlaskun riippuvuutta puheajasta. Havainnollista riippuvuutta koordinaatistossa.

b) Kuinka suuri puhelinlasku on, kun Sandra puhuu kuukauden aikana 0,8 h?

c) Kuinka monta minuuttia Sandra on puhunut, jos puhelinlasku on 12,70 €?

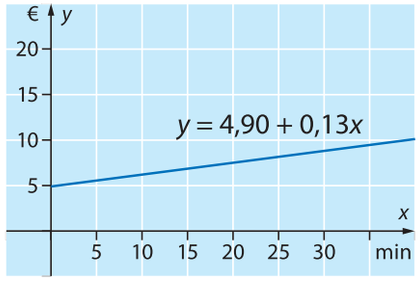
RATKAISU

Koska puhelinlaskun suuruus riippuu puheajasta, merkitään puheaikaa kirjaimella x (min) ja laskun suuruutta kirjaimella y (€).

a) Muodostetaan malli tutkimalla laskun suuruutta taulukon avulla.

Puheaika (min)	Laskun suuruus (€)
0	4,90
1	$4{,}90 + 0{,}13 \cdot 1$
2	$4{,}90 + 0{,}13 \cdot 2$
x	$4{,}90 + 0{,}13 \cdot x$

Riippuvuutta kuvaava yhtälö on $y = 4{,}90 + 0{,}13x$ (€). Piirretään kuvaaja teknisen apuvälineen avulla.



Malli on pätevä, kun $x \geq 0$, koska puheaika ei voi olla negatiivinen.

b) Sijoitetaan puheaika $x = 0{,}8 \cdot 60 = 48$ (min) riippuvuutta kuvaavaan yhtälöön.

$$y = 4{,}90 + 0{,}13 \cdot 48 = 11{,}14 \quad \text{(€)}$$

Mallia muodostettaessa puheaika oli minuutteina, joten 0,8 h on muutettava minuuteiksi.

c) Laskun suuruus $y = 12{,}70$ (€). Ratkaistaan puheaika x yhtälön avulla.

$$4{,}90 + 0{,}13x = 12{,}70$$

$$x = 60 \quad \text{(min)}$$

VASTAUS **a)** $y = 4{,}90 + 0{,}13x$ (€), $x \geq 0$ **b)** 11,14 € **c)** 60 min

ESIMERKKI 3

Roope osti käytetyn auton. Sen arvo ostohetkellä oli 15 000 €. Hän myi autonsa viiden vuoden kuluttua. Auton arvo oli laskenut keskimäärin 1600 € vuodessa.

a) Määritä auton arvon y (€) ja ajan t (a) välistä riippuvuutta kuvaavan suoran yhtälö.

b) Mikä oli auton arvo myyntihetkellä?

c) Milloin mallin mukaan auton arvo on alle 6200 €?

RATKAISU

a) Muodostetaan malli.

Aika (a)	Auton arvo (€)
0	15 000
1	15 000 – 1600
2	15 000 – 1600 · 2
3	15 000 – 1600 · 3
t	15 000 – 1600 · t

Auton arvon y ja ajan t välistä riippuvuutta kuvaava yhtälö on

$$y = 15\,000 - 1600t \quad (€)$$

b) Myyntihetkellä aika $t = 5$, joten auton arvo on

$$y = 15\,000 - 1600 \cdot 5 = 7000 \quad (€)$$

c) Auton arvo on alle 6200 €, kun

$$y < 6200$$
$$15\,000 - 1600t < 6200$$
$$t > 5\frac{1}{2} \quad (\text{a})$$

Auton arvo on alle 6200 €, kun aikaa on kulunut yli 5,5 vuotta.

VASTAUS

a) $y = 15\,000 - 1600t$ (€) **b)** 7000 €

c) yli 5,5 vuoden kuluttua

ESIMERKKI 4

Hakkuualueella havaittiin kuusen pituuden riippuvan lineaarisesti rungon läpimitasta. Tulokset koottiin taulukkoon.

Läpimitta (cm)	5,0	7,0	9,0	10,0	15,0
Pituus (m)	5,0	6,4	7,8	8,5	12,0

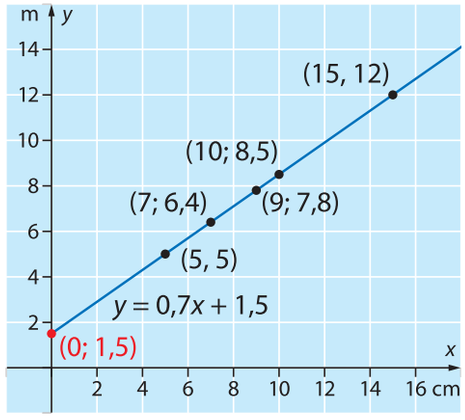
a) Merkitse pisteet koordinaatistoon ja sovita pistejoukkoon suora.
b) Määritä suoran yhtälö ja arvioi mallin pätevyyttä puulle, jonka pituus on korkeintaan 1,5 m.

RATKAISU

a) Koska kuusen pituus (m) riippuu rungon läpimitasta (cm), pisteiden y-koordinaatteina ovat kuusen pituusarvot ja x-koordinaatteina vastaavat rungon läpimitan arvot. Merkitään pisteet koordinaatistoon ja sovitetaan pistejoukkoon suora.

Jos pisteen koordinaatit ovat desimaalilukuja, ne erotetaan toisistaan puolipisteellä.

(5,0; 5,0)
(7,0; 6,4)
(9,0; 7,8)
(10,0; 8,5)
(15,0, 12,0)



b) Suoran yhtälö saadaan teknisen apuvälineen avulla.

$y = 0{,}7x + 1{,}5$ (m)

Ratkaistaan epäyhtälön avulla sellaisen puun rungon läpimitta, jonka pituus on korkeintaan 1,5 m.

$$0{,}7x + 1{,}5 \leq 1{,}5$$
$$x \leq 0$$

Myös kuvaajasta nähdään, että alle 1,5 m pitkän puun rungon läpimitta on negatiivinen luku.

Mallin mukaan rungon läpimitta olisi negatiivinen luku tai nolla, joten tämä malli ei ole pätevä, kun puun pituus on korkeintaan 1,5 m.

VASTAUS

b) Suoran yhtälö on $y = 0{,}7x + 1{,}5$ (m). Malli ei ole pätevä, kun puun pituus on korkeintaan 1,5 m.

Tehtävät

1. Sisustuskankaan metrihinta oli 12 €. Muodosta lauseke kankaan hinnalle, kun Sanni osti kangasta

a) 2 m **b)** 150 cm **c)** x (m).

2. Täydennä taulukko. Ilmoita yhtälö, joka kuvaa y:n riippuvuutta x:stä.

a)

x	y
0	0
1	3
2	6
3	9
x	

b)

x	y
–3	12
–2	8
0	0
1	–4
x	

3. Etäisyys s (km) tien risteyksestä riippuu ajasta t (h) lineaarisesti. Riippuvuutta kuvaa yhtälö $s = 45t + 2$.

a) Täydennä taulukko.

t (h)	s (km)
0	
	47
4	

b) Mikä on etäisyys tien risteyksestä tarkastelun alkuhetkellä?

c) Kuinka kauan aikaa oli kulunut, kun etäisyys tien risteyksestä oli 47 km?

E1 **4.** Kolmion kanta y riippuu kolmion korkeudesta x yhtälön $y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$ mukaisesti. Määritä kolmion

a) kannan pituus, kun korkeus on 3

b) korkeus, kun kannan pituus on 3.

---

5. Hirvikannan suuruuden on todettu vaikuttavan liikenneonnettomuuksiin. Onnettomuuksien lukumäärän y havaittiin riippuvan hirvien määrästä x yhtälön $y = 0{,}02x - 643$ mukaisesti. Laske

a) onnettomuuksien määrä, jos hirvikanta on 100 000

b) hirvien määrä, jos onnettomuuksia on 357.

6. Juna kulkee vakionopeudella 120 km/h. Kuljetun matkan y (km) riippuvuutta käytetystä ajasta x (h) kuvaa yhtälö $y = 120x$.

a) Kuinka pitkän matkan juna etenee 2,5 tunnissa?

b) Kuinka pitkän matkan juna etenee 43 minuutissa?

c) Kuinka kauan kestää 220 km:n matka? Ilmoita vastaus minuutin tarkkuudella.

E2

7. Kalakauppias myi savusiikaa keskimäärin 120 kg päivässä. Hän päätti alentaa kilohintaa päivittäin ja havaitsi myynnin lisääntyvän 3 kg päivässä.

a) Mallinna päivittäisen myyntimäärän (kg) riippuvuutta hinnan alennuskerroista muodostamalla suoran yhtälö.

b) Kuinka suuri oli päivämyynti, kun hintaa oli alennettu 5 kertaa?

c) Kuinka monta kertaa kilohintaa oli alennettu, kun päivämyynti oli 165 kg?

8. Huutokaupassa vasarahinta on hinta, joka kohteesta huudetaan. Eräässä huutokaupassa ostaja maksaa vasarahinnan lisäksi huutomaksun, joka on 20 % vasarahinnasta. Tämä maksu sisältää arvonlisäveron. Lisäksi veloitetaan vasaramaksu, joka on 3 € kohteelta.

a) Mallinna kohteen kokonaiskustannuksen riippuvuutta vasarahinnasta. Havainnollista riippuvuutta koordinaatistossa.

b) Kristiina ostaa lasikulhon, jonka vasarahinnaksi muodostuu 150 €. Kuinka suuri on kokonaiskustannus?

c) Kuinka suuri on vasarahinta, kun Jarkko maksoi huutamastaan kitarasta 70,20 €?

9. Lukujen y ja x erotus on 15.

a) Määritä yhtälö, joka kuvaa luvun y riippuvuutta luvusta x.

b) Havainnollista riippuvuutta koordinaatistossa.

c) Määritä kuvaajan avulla, millaisia luvut x ovat suuruudeltaan, jos niitä vastaavat luvut y ovat negatiivisia.

E3

10. Ilman lämpötila muuttui eräänä iltana viiden tunnin aikana siten, että se laski 2,5 °C tunnissa. Tarkastelun alussa klo 18.00 lämpötila oli 15,5 °C.

a) Mallinna lämpötilan y (°C) riippuvuutta ajasta x (h) tarkastelun (h) alusta lukien muodostamalla riippuvuutta kuvaava yhtälö.

b) Mikä oli lämpötila klo 22.00?

c) Kuinka paljon kello oli, kun lämpötila alitti 9,5 °C?

11. Aleksin auton polttoaineen kulutus on noin 0,07 l ajettua kilometriä kohden. Lähtöhetkellä tankissa oli polttoainetta 75 l. Tankissa olevan polttoaineen määrä y (l) riippuu lineaarisesti ajetuista kilometreistä x.

a) Muodosta riippuvuutta kuvaava suoran yhtälö.
b) Kuinka paljon tankissa on polttoainetta 150 km:n jälkeen?
c) Kuinka monen ajetun kilometrin jälkeen tankissa on 51 l?
d) Kuinka monen ajetun kilometrin jälkeen tankki on tyhjä?

E4 **12.** Biologi tutki yhdelle liskolle syötettyjen toukkien lukumäärän vaikutusta liskon lisääntymiseen. Hän havaitsi liskon munimien munien y riippuvan lineaarisesti liskolle syötettyjen toukkien lukumäärästä x ruokintakerralla. Liskolle voitiin syöttää maksimissaan 10 toukkaa yhdellä ruokintakerralla. Tulokset koottiin taulukkoon.

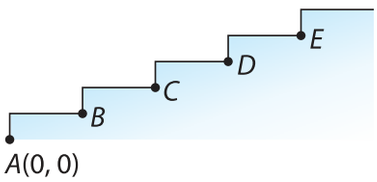
Toukkien lukumäärä ruokintakerralla	1	3	4	6	9
Munien lukumäärä	2	6	8	12	18

a) Merkitse pisteet koordinaatistoon.
b) Sovita pistejoukkoon suora. Mikä on suoran yhtälö?
c) Milloin malli on pätevä?

13. Kylpylän saunan lämpötilan y (°C) riippuvuutta lämmitykseen käytetystä ajasta x (min) tutkittiin 50 minuutin aikana. Kun saunaa oli lämmitetty 10 minuuttia, lämpötila oli 32 °C. Puolen tunnin lämmityksen jälkeen lämpötila oli 54 °C. Ajan päätyttyä, saunan lämpötila oli 76 °C.

a) Merkitse pisteet koordinaatistoon.
b) Sovita pistejoukkoon suora. Mikä on suoran yhtälö?
c) Arvioi mallin pätevyyttä. Mikä on saunan lämpötila lämmityksen alussa?

14. Samu katsoo piirrosta, johon on kuvattu portaikko sivusta katsottuna. Piirroksen päälle asetetaan koordinaatisto siten, että portaikon alareuna on oheisen kuvan mukaisesti origossa. Portaan korkeus on 15 cm ja syvyys 42 cm.



a) Muodosta neljän portaan alareunassa olevien pisteiden B, C, D ja E koordinaatit, kun koordinaatiston yksikkö on 10 cm.
b) Sovita pistejoukkoon suora. Mikä on suoran yhtälö? Anna lukuarvot kahden desimaalin tarkkuudella.

Sekalaisia

15. Roosa pyytää perhejuhlaan valokuvaajan. Kuvauskeikalla on kiinteä lähtöhinta 200 €, jonka lisäksi veloitetaan 32 € tunnilta.

a) Muodosta malli, joka kuvaa kokonaiskustannusten riippuvuutta tuntimäärästä.

b) Kuinka suuri on 2,5 tunnin kuvauskeikan hinta?

c) Kuinka monen tunnin kuvauskeikka maksaa 344 €?

16. Veden tilavuus kanisterissa oli 10 l. Kanisterissa oli reikä, josta vettä valui keskimäärin 0,8 dl tunnissa.

a) Tutki veden tilavuuden y (l) ja ajan t (h) riippuvuutta ja määritä riippuvuutta kuvaava yhtälö.

b) Paljonko kanisterissa oli vettä 5 tunnin kuluttua?

c) Missä ajassa kanisteri tyhjeni?

17. Tutkimukseen osallistuvien henkilöiden massan (kg) havaittiin riippuvan lineaarisesti pituudesta (cm) yhtälön $y = 0{,}875x - 76$ mukaisesti.

a) Määritä 1,8 m pitkän henkilön massa.

b) Kuinka pitkä on henkilö, jonka massa on 70 kg? Anna vastaus senttimetrin tarkkuudella.

c) Arvioi mallin pätevyyttä vauvoille, joiden pituus on alle 52 cm.

18. Matematiikan kokeen arvosana riippui pistemäärästä lineaarisesti siten, että arvosana 4– annettiin, jos ei saanut yhtään pistettä kokeessa. Arvosana nousi tästä 0,25 yksikköä jokaista saatua pistettä kohden.

a) Mallinna arvosanan riippuvuutta saadusta pistemäärästä, kun arvosana 4– merkitään lukuna 3,75. Havainnollista riippuvuutta koordinaatistossa.

b) Mikä oli arvosana, jos kokeesta sai 15 pistettä?

c) Kuinka monta pistettä vaadittiin arvosanaan 10?

19. Neliöpohjaisen pyramidin pohjasärmän s (m) ja korkeuden h (m) summa on 2,4 m.

a) Määritä yhtälö, joka kuvaa pohjasärmän pituuden riippuvuutta korkeudesta.

b) Havainnollista riippuvuutta koordinaatistossa.

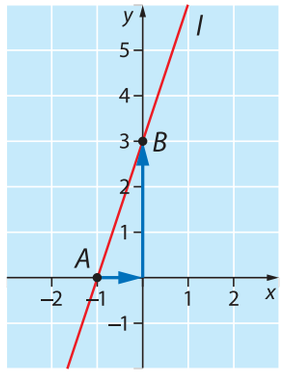
c) Arvioi mallin pätevyyttä. Millä välillä korkeus voi vaihdella?

d) Laske mallin avulla pyramidin korkeus, kun pohjasärmän pituus 65 cm.

1.2 Suoran yhtälö

Pohdinta

Tarkastellaan kuvassa olevaa suoraa l. Valitaan suoralta kaksi pistettä $A(-1, 0)$ ja $B(0, 3)$.



a) Siirry pisteestä A pisteeseen B etenemällä vaaka- ja pystysuuntaan.

- Muutos vaakasuuntaan on $\Delta x =$
- Muutos pystysuuntaan on $\Delta y =$

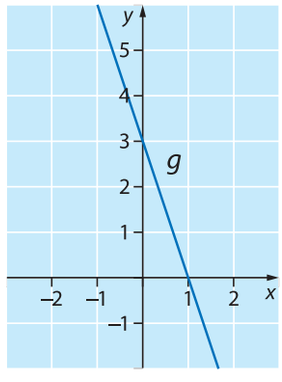
b) Miten määrittäisit muutokset Δx ja Δy ilman kuvaajaa, pelkästään pisteiden A ja B koordinaattien avulla?

c) Laske, kuinka paljon suora nousee yhtä x-arvon muutosta kohden eli

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

d) Myös pisteet $C(10, 33)$ ja $D(20, 63)$ ovat suoran l pisteitä. Laske suhteen $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ arvo samalla tavalla kuin edellä. Mitä havaitset?

e) Valitse suoralta g kaksi pistettä. Määritä näiden avulla suhteen $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ arvo suoralle g. Vertaa suhteen arvoa suoran l vastaavaan arvoon. Mitä havaitset?



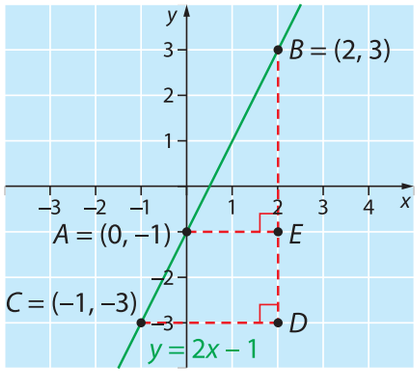
Kulmakerroin ja vakiotermi

Tarkastellaan suoraa $y = 2x - 1$. Suora voidaan piirtää kahden pisteen avulla.

x	$y = 2x - 1$	(x, y)
-1	$y = 2 \cdot (-1) - 1 = -3$	$C(-1, -3)$
0	$2 \cdot 0 - 1 = -1$	$A(0, -1)$
2	$2 \cdot 2 - 1 = 3$	$B(2, 3)$

Kolmas piste kannattaa yleensä laskea tarkistuspisteeksi.

Piirretään pisteiden A, B ja C avulla kaksi suorakulmaista kolmiota.



Kolmiot ovat kk-lauseen perusteella yhdenmuotoisia eli $AEB \sim CDB$.

- Pisteiden A ja B avulla muodostuu kolmio AEB.
- Pisteiden C ja B avulla muodostuu kolmio CDB.

Tutkitaan pysty- ja vaakasuuntaisten sivujen suhdetta molemmissa kolmioissa.

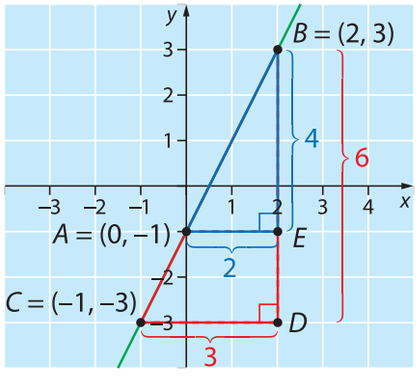
$\frac{y\text{-koordinaatin muutos}}{x\text{-koordinaatin muutos}}$

kolmio AEB

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3 - (-1)}{2 - 0} = \frac{4}{2} = 2$$

kolmio CDB

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3 - (-3)}{2 - (-1)} = \frac{6}{3} = 2$$



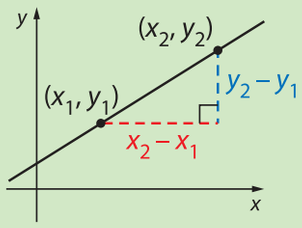
Yhdenmuotoisille kolmioille suhde $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ on sama riippumatta suoralta valituista pisteistä. Suhteen arvoa kutsutaan suoran **kulmakertoimeksi** k.

Lisämateriaali: Suuntakulma s. 146

Suoran kulmakerroin

Kulmakerroin k voidaan laskea kahden suoran pisteen (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) avulla, $x_1 \neq x_2$.

$$k = \frac{y\text{-koordinaatin muutos}}{x\text{-koordinaatin muutos}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



Kun suoran yhtälö esitetään muodossa $y = kx + b$, kulmakerroin k on muuttujatermin kertoimena. Kulmakertoimesta voidaan päätellä suoran **kulkusuunta**. Suora on

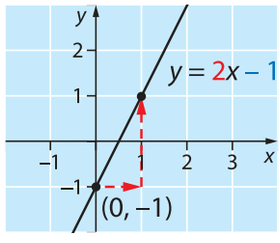
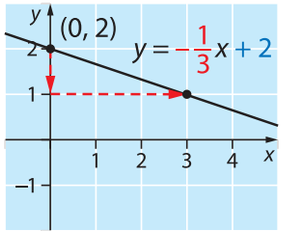
- nouseva, jos $k > 0$
- laskeva, jos $k < 0$.

Sijoitetaan $x = 0$ yhtälöön $y = kx + b$.

$y = k \cdot 0 + b = b$

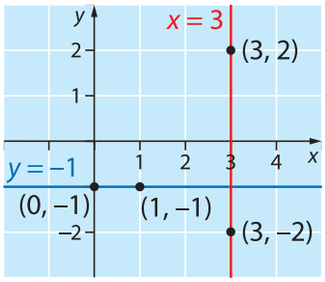
Suoran yhtälöstä $y = kx + b$ voidaan päätellä myös piste, jossa suora leikkaa y-akselin. Tässä pisteessä x-koordinaatti saa arvon nolla, joten y-koordinaatti saa arvon b.

- Kun suoran **vakiotermi** on b, leikkauspiste on $(0, b)$.

Suoran yhtälö $y = kx + b$	Kulkusuunta	y-akselin leikkauspiste $(0, b)$	Kuvaaja
$y = 2x - 1$	$k = 2 > 0$ nouseva suora	$b = -1$ $(0, -1)$	
$y = -\frac{1}{3}x + 2$	$k = -\frac{1}{3} < 0$ laskeva suora	$b = 2$ $(0, 2)$	

Erikoistapauksina ovat koordinaattiakseleiden suuntaiset suorat, esimerkiksi $x = 3$ ja $y = -1$.

Jos suoran jokaisen pisteen x-koordinaatti on 3, suoran yhtälö on $x = 3$. Suora on y-akselin suuntainen. Kulmakerrointa ei ole määritelty, koska



$$k = \frac{2-(-2)}{3-3} = \frac{4}{0}.$$

Nollalla ei voi jakaa.

Jos suoran jokaisen pisteen y-koordinaatti on -1, suoran yhtälö on $y = -1$. Suora on x-akselin suuntainen. Kulmakerroin on

$$k = \frac{-1-(-1)}{1-0} = \frac{0}{1} = 0.$$

Yhtälö ei sisällä termiä x, koska $k = 0$.

ESIMERKKI 1

Määritä suoran kulmakeroin ja kulkusuunta, kun suora kulkee pisteiden

a) (2, 1) ja (4, 5) **b)** (–3, 5) ja (2, –1) kautta.

RATKAISU

a) Lasketaan ensin suoran kulmakerroin k.

Valitaan pisteeksi $(x_1, y_1) = (2, 1)$ ja pisteeksi $(x_2, y_2) = (4, 5)$.

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-1}{4-2} = \frac{4}{2} = 2$$

Tapa 2:
Voidaan valita myös:
$(x_1, y_1) = (4, 5)$ ja $(x_2, y_2) = (2, 1)$.

$$k = \frac{1-5}{2-4} = \frac{-4}{-2} = 2$$

Koska kulmakerroin $k = 2$ on positiivinen luku, suora on nouseva.

b) Lasketaan ensin suoran kulmakerroin k.

Valitaan pisteeksi $(x_1, y_1) = (-3, 5)$ ja pisteeksi $(x_2, y_2) = (2, -1)$.

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1-5}{2-(-3)} = \frac{-6}{5} = -\frac{6}{5}$$

Koska kulmakerroin $k = -\frac{6}{5}$ on negatiivinen luku, suora on laskeva.

VASTAUS **a)** $k = 2$, nouseva suora **b)** $k = -\frac{6}{5}$, laskeva suora

Suoran, jolle $k = 2$ ja $b = -1$, yhtälö

- ratkaistussa muodossa on $y = 2x - 1$
- yleisessä muodossa on $-2x + y + 1 = 0$

Suoran yhtälö voidaan esittää kahdessa eri muodossa.

- Suoran yhtälön ratkaistussa muodossa $y = kx + b$ suoran yhtälö on ratkaisu y:n suhteen.
- Suoran yhtälön yleisessä muodossa $Ax + By + C = 0$ (A, B ja C ovat reaalilukuja) kaikki termit ovat yhtälön samalla puolella.

Yleisestä muodosta ratkaistu muoto	Ratkaistusta muodosta yleinen muoto
$3x - 5y + 10 = 0$ $-5y = -3x - 10 \quad \vert :(-5)$ $y = \frac{3}{5}x + 2$	$y = \frac{3}{5}x + 2$ $-\frac{3}{5}x + y - 2 = 0$ Termien kertoimiksi saadaan kokonaisluvut, jos yhtälön molemmat puolet kerrotaan luvulla 5. $-\frac{3}{5}x + y - 2 = 0 \quad \vert \cdot 5$ $-3x + 5y - 10 = 0$

Huomaa, että kulmakerroin k ja y-akselin leikkauspiste $(0, b)$ voidaan todeta suoraan vain ratkaistusta muodosta.

Suoran yhtälön ratkaistu muoto $y = kx + b$

Suoran yhtälön $y = kx + b$ vakioiden merkitykset:

- k on kulmakerroin.
  - Kun $k > 0$, suora on nouseva.
  - Kun $k < 0$, suora on laskeva.
  - Kun $k = 0$, suora on x-akselin suuntainen.
  - Kun k ei ole määritelty, suora on y-akselin suuntainen.
- b on vakiotermi.
  - y-akselin leikkauspiste on $(0, b)$.

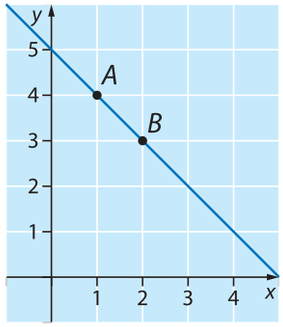
ESIMERKKI 2

Suora kulkee pisteiden $A(1, 4)$ ja $B(2, 3)$ kautta. Määritä

a) suoran kulmakerroin

b) y-akselin leikkauspiste kuvaajan avulla

c) suoran yhtälö ratkaistussa muodossa.



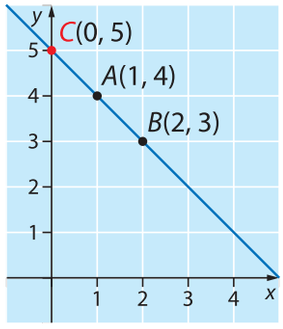
RATKAISU

a) Kulmakerroin

Valitaan
$(x_1, y_1) = (1, 4)$ ja
$(x_2, y_2) = (2, 3)$.

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-4}{2-1} = \frac{-1}{1} = -1$$

b) Kuvaajasta nähdään y-akselin leikkauspiste $C(0, 5)$.



c) Suoran yhtälö voidaan muodostaa kulmakertoimen ja vakiotermin avulla.

- Suoran kulmakertoimeksi määritettiin $k = -1$.
- Koska y-akselin leikkauspiste on $(0, 5)$, vakiotermi on $b = 5$.

Suoran yhtälö on

$$y = kx + b$$

$$y = -1x + 5$$

$$y = -x + 5$$

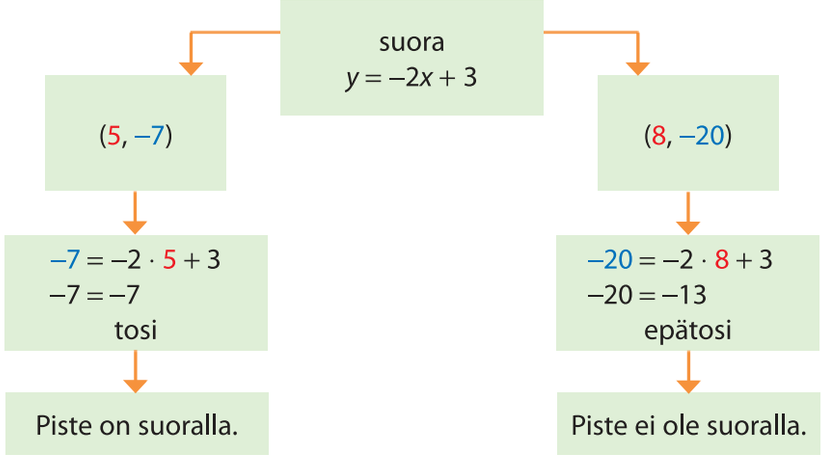
VASTAUS **a)** $k = -1$ **b)** $(0, 5)$ **c)** $y = -x + 5$

Suoran yhtälön avulla voidaan määrittää suoralle kuuluvia pisteitä, esimerkiksi koordinaattiakseleiden leikkauspisteitä.

- Jos määritetään y-akselin leikkauspistettä, pisteen x-koordinaatti on nolla.
- Jos määritetään x-akselin leikkauspistettä, pisteen y-koordinaatti on nolla.

Suoran yhtälö	***y*-akselin leikkauspiste ($x = 0$)**	***x*-akselin leikkauspiste ($y = 0$)**
Ratkaistu muoto $y = x + 2$	Leikkauspiste nähdään ratkaisun muodosta suoraan. Piste on $(0, 2)$.	Sijoitetaan $y = 0$ suoran yhtälöön ja ratkaistaan x. $x + 2 = 0$ $x = -2$ Piste on $(-2, 0)$.
Yleinen muoto $3y - 2x + 1 = 0$	Sijoitetaan $x = 0$ suoran yhtälöön ja ratkaistaan y. $3y - 2 \cdot 0 + 1 = 0$ $3y = -1 \quad \vert :3$ $y = -\frac{1}{3}$ Piste on $\left(0, -\frac{1}{3}\right)$.	Sijoitetaan $y = 0$ suoran yhtälöön ja ratkaistaan x. $3 \cdot 0 - 2x + 1 = 0$ $-2x = -1 \quad \vert :(-2)$ $x = \frac{1}{2}$ Piste on $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

Suoran yhtälön avulla voidaan myös tarkistaa, kuuluuko annettu piste suoralle. Tällöin pisteen molemmat koordinaatit sijoitetaan suoran yhtälöön. Jos pisteen koordinaatit toteuttavat suoran yhtälön, piste kuuluu suoralle.



ESIMERKKI 3

Suoran yhtälö on $3y + 2x - 24 = 0$.

a) Määritä suoran ja koordinaattiakselien leikkauspisteet.

b) Tutki, onko piste (2, 6) suoralla.

RATKAISU

a) Suoran ja x-akselin leikkauspisteessä $y = 0$, jolloin sijoittamalla saadaan

$$\begin{aligned} 3 \cdot 0 + 2x - 24 &= 0 \\ 2x &= 24 \quad \big| : 2 \\ x &= 12 \end{aligned}$$

Piste, jossa suora leikkaa x-akselin, on (12, 0).

Suoran ja y-akselin leikkauspisteessä $x = 0$, jolloin sijoittamalla saadaan

$$\begin{aligned} 3y + 2 \cdot 0 - 24 &= 0 \\ 3y &= 24 \quad \big| : 3 \\ y &= 8 \end{aligned}$$

Piste, jossa suora leikkaa y-akselin, on (0, 8).

b) Tutkitaan, onko piste (2, 6) suoralla sijoittamalla pisteen koordinaatit yhtälöön.

$$\begin{aligned} 3 \cdot 6 + 2 \cdot 2 - 24 &= 0 \\ 18 + 4 - 24 &= 0 \\ -2 &= 0 \end{aligned}$$

← Sijoitetaan $x = 2$ ja $y = 6$.

Saatu väite on epätosi, joten piste ei ole suoralla.

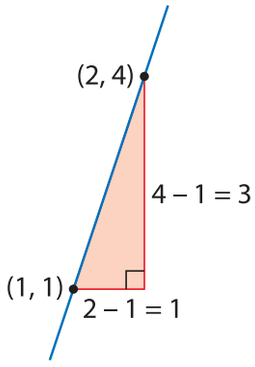
VASTAUS

a) (12, 0) ja (0, 8)

b) Ei ole.

Suoran yhtälö

Esimerkissä 2 suoran yhtälö määritettiin kuvaajan avulla. Koska vakiotermiä b ei saa katsoa kuvasta, ellei toisin mainita, suoran yhtälön määrittäminen pitää onnistua myös ilman kuvaajaa.

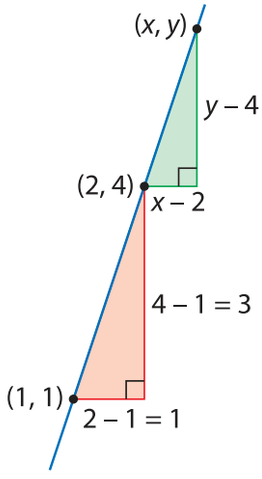


Tarkastellaan suoraa, joka kulkee pisteiden (1, 1) ja (2, 4) kautta. Suoran kulmakerroin

$$k = \frac{4-1}{2-1} = \frac{3}{1} = 3$$

Valitaan
$(x_1, y_1) = (1, 1)$ ja $(x_2, y_2) = (2, 4)$
$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Yhtälön määrittämiseksi valitaan suoralta mielivaltainen piste (x, y). Koska kulmakertoimen laskemiseksi tarvitaan kaksi pistettä, valitaan toiseksi pisteeksi jokin annetuista pisteistä, esimerkiksi (2, 4), ja muodostetaan kulmakertoimen lauseke.



$$k = \frac{y-4}{x-2}$$

Koska pisteet ovat samalla suoralla, laskettujen kulmakertoimien pitää olla yhtä suuret.

$$\frac{y-4}{x-2} = \frac{3}{1}$$ ristiinkertominen

$$y - 4 = 3(x - 2)$$

$$y - 4 = 3x - 6$$

$$y - 3x + 2 = 0$$ yleinen muoto

$$y = 3x - 2$$ ratkaistu muoto

Jos tunnettua pistettä merkitään yleisesti (x_0, y_0) ja kulmakerrointa kirjaimella k, suoran yhtälö on muotoa

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = k$$

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{k}{1}$$

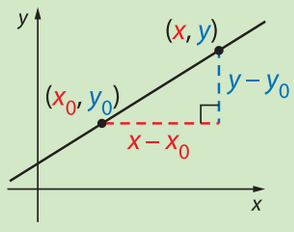
$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

$$y - y_0 = k(x - x_0)\,.$$

Suoran yhtälö

Jos suora kulkee pisteen (x_0, y_0) kautta ja kulmakerroin on k, suoran yhtälö on

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$



ESIMERKKI 4

Määritä suoran yhtälö ratkaistussa muodossa, kun suora kulkee

a) pisteen $(3, -1)$ kautta ja kulmakerroin on -1

b) pisteiden $(-4, 3)$ ja $(4, 5)$ kautta

c) pisteiden $(7, -2)$, $(7, 0)$ kautta.

RATKAISU

a) Suoran kulmakerroin $k = -1$.

Merkitään suoran tunnettua pistettä $(x_0, y_0) = (3, -1)$.

Suoran yhtälön määrittämiseksi tarvitaan kulmakerroin ja jokin suoran tunnettu piste.

Sijoitetaan kulmakerroin ja tunnetun pisteen koordinaatit yhtälöön $y - y_0 = k(x - x_0)$.

$$y - (-1) = -1(x - 3)$$

$$y + 1 = -x + 3$$

$$y = -x + 2$$

b) Lasketaan ensin suoran kulmakerroin.

$$k = \frac{5 - 3}{4 - (-4)} = \frac{2}{8} \overset{(2}{=} \frac{1}{4}$$

Valitaan tunnetuksi pisteeksi $(x_0, y_0) = (-4, 3)$. Sijoitetaan kulmakertoimen arvo sekä pisteen $(-4, 3)$ koordinaatit suoran yhtälöön.

$$y - 3 = \frac{1}{4}(x - (-4)) \quad \leftarrow \; y - y_0 = k(x - x_0)$$

$$y - 3 = \frac{1}{4}(x + 4)$$

$$y - 3 = \frac{1}{4}x + 1$$

$$y = \frac{1}{4}x + 4$$

c) Lasketaan ensin suoran kulmakerroin.

$$k = \frac{-2 - 0}{7 - 7} = \frac{-2}{0}$$

Suoran kulmakerrointa ei ole määritelty, joten suora on y-akselin suuntainen. Suoran kaikkien pisteiden x-koordinaatti on 7 eli suoran yhtälö on $x = 7$.

VASTAUS **a)** $y = -x + 2$ **b)** $y = \frac{1}{4}x + 4$ **c)** $x = 7$

ESIMERKKI 5

Suoran s yhtälö on $y = \frac{2}{7}x - 13$. Suoran l yhtälö on $3y - 4ax + 6a = 0$ ja se kulkee pisteen $(-16, 35)$ kautta.

a) Määritä vakio a ja suoran l kulmakerroin.

b) Laske suorien l ja s leikkauspiste.

RATKAISU

a) Koska piste $(-16, 35)$ on suoralla, pisteen koordinaatit toteuttavat suoran yhtälön $3y - 4ax + 6a = 0$.

Sijoitetaan $x = -16$ ja $y = 35$ suoran yhtälöön.

$$3 \cdot 35 - 4a \cdot (-16) + 6a = 0$$

$$a = -\frac{3}{2}$$

Suoran l yhtälö saadaan, kun sijoitetaan $a = -\frac{3}{2}$ suoran l yhtälöön.

$$3y - 4 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)x + 6 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = 0$$

$$3y + 6x - 9 = 0$$

Määritetään suoran l yhtälön ratkaistu muoto, josta nähdään kulmakerroin.

$$3y + 6x - 9 = 0$$

Ratkaistaan yhtälöstä y laskinohjelman Ratkaise-toiminnolla.

$$y = -2x + 3$$

Suoran l kulmakerroin on $k = -2$.

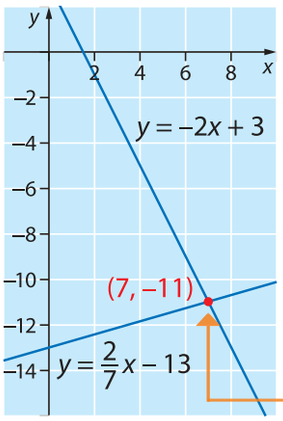
b) Leikkauspiste on molemmilla suorilla, joten se toteuttaa molempien suorien yhtälöt. Leikkauspiste määritetään ratkaisemalla yhtälöpari

$$\begin{cases} y = \frac{2}{7}x - 13 \\ y = -2x + 3 \end{cases}$$

Yhtälöpari voidaan ratkaista suoraan laskinohjelman avulla.

$x = 7$ ja $y = -11$

Suorien leikkauspiste on $(7, -11)$.



Leikkauspiste voidaan tarkistaa graafisesti kuvaajan avulla.

VASTAUS **a)** $a = -\frac{3}{2}$ ja kulmakerroin on $k = -2$ **b)** $(7, -11)$

ESIMERKKI 6

Suora kulkee pisteiden $(4, 3c)$ ja $(-1, 12 - c)$ kautta.

a) Määritä sellainen vakio c, että suora on laskeva.

b) Määritä sellainen vakio c, että suoran kulmakerroin on 4. Mikä on suoran yhtälö?

RATKAISU

a) Suora on laskeva, kun kulmakerroin $k < 0$.

Valitaan
$(x_1, y_1) = (4, 3c)$ ja
$(x_2, y_2) = (-1, 12 - c)$
$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(12 - c) - 3c}{-1 - 4}$

$$\frac{(12 - c) - 3c}{-1 - 4} < 0$$

$$c < 3$$

b) Suoran kulmakerroin on 4, kun

$$\frac{(12 - c) - 3c}{-1 - 4} = 4$$

$$c = 8$$

$(4, 3c) = (4, 3 \cdot 8) = (4, 24)$
$(-1, 12 - c) = (-1, 12 - 8) = (-1, 4)$

Kun $c = 8$, suora kulkee pisteiden $(4, 24)$ ja $(-1, 4)$ kautta.
Koska kulmakerroin $k = 4$, suoran yhtälöksi saadaan

$$y - 4 = 4(x - (-1))$$

$$y = 4x + 8$$

Valitaan $(x_0, y_0) = (-1, 4)$

VASTAUS **a)** $c < 3$ **b)** $c = 8$, $y = 4x + 8$

Laskimen tai muun apuvälineen käyttö

Suoran yhtälön ratkaistu muoto

Suoran yhtälöstä ratkaistaan laskinohjelman avulla y.

Suorien leikkauspiste

Suorien leikkauspisteet voidaan määrittää ratkaisemalla laskinohjelmalla yhtälöpari.

Suoran kuvaajan käyttö

Selvitä omasta piirto-ohjelmastasi, miten saat selville
- suoran kulmakertoimen
- suoran ja koordinaattiakselien leikkauspisteet
- kahden suoran leikkauspisteen koordinaatit
- suoran pisteiden koordinaatteja (esim. jäljitys-toiminto).

Tehtävät

Kulmakerroin ja vakiotermi

20. Määritä suoran kulmakerroin ja kulkusuunta, kun suoran yhtälö on

a) $y = 7x - 4$ **b)** $y = -x - 4$ **c)** $y = -\frac{1}{3}x$.

21. Määritä y-akselin leikkauspiste, kun suoran yhtälö on

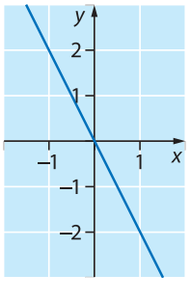
a) $y = -x - 2$ **b)** $y = \frac{2}{3}x$ **c)** $y = 6$.

22. Onko suora nouseva vai laskeva?

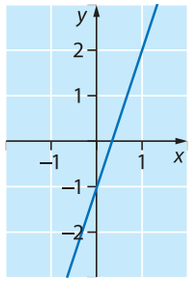
a) $y = -0{,}5x + 3{,}6$ **b)** $3x = 2 - y$ **c)** $6x - y = 0$

23. Määritä kuvassa olevan suoran kulmakerroin. Onko suora nouseva vai laskeva?

a)



b)



E1 **24.** Määritä suoran kulkusuunta, kun suora kulkee pisteiden

a) (–5, 0) ja (1, 6) **b)** (2, 5) ja (4, –7) kautta.

25. Määritä suoran kulmakerroin, kun suora kulkee pisteiden

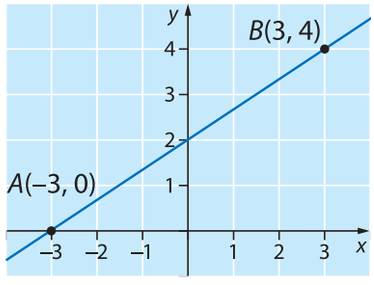
a) (–5, 2) ja (3, –6) **b)** (–6, 8) ja (–1, 8) kautta.

E2 **26.** Kuvassa oleva suora kulkee pisteiden $A(-3, 0)$ ja $B(3, 4)$ kautta. Määritä

a) suoran kulmakerroin

b) y-akselin leikkauspiste kuvaajan avulla

c) suoran yhtälö.



27. Muodosta suoran yhtälö, kun

a) kulmakerroin on –5 ja y-akselin leikkauspiste (0, –3)

b) kulmakerroin on 0 ja y-akselin leikkauspiste on (0, 1).

28. Määritä suoran kulmakerroin ja y-akselin leikkauspiste, kun suoran yhtälö on

a) $y - 4x + 3 = 0$ **b)** $y + \frac{3}{5}x - 2 = 0$

c) $-2y + 6x - 1 = 0$ **d)** $y + 5 = 0$.

E3 **29.** Suoran yhtälö on $5x - y + 1 = 0$.

a) Määritä koordinaattiakseleiden leikkauspisteet.

b) Onko piste (2, 11) suoralla?

30. Määritä suoran ja koordinaattiakselien leikkauspisteet, kun suoran yhtälö on

a) $y = 3x - 15$ **b)** $y = -5x$ **c)** $y = -\frac{1}{2}x + 4$.

31. Suoran yhtälö on $x - 5y + 25 = 0$. Määritä suoran

a) kulkusuunta

b) x-akselin leikkauspiste

c) y-akselin leikkauspiste.

32. Suora kulkee pisteen (–10, 6) kautta ja sen kuvaaja leikkaa y-akselin kohdassa $y = 1$.

a) Määritä suoran yhtälön yleinen muoto.

b) Onko piste (36, 20) suoralla?

Suoran yhtälö

33. Määritä suoran yhtälö ratkaistussa muodossa, kun suora kulkee pisteen (–6, 5) kautta ja

a) kulmakerroin on 1 **b)** kulmakerroin on $\frac{1}{3}$.

34. Määritä suoran yhtälön ratkaistu muoto, kun suoran kulmakerroin on $-\frac{1}{5}$ ja suora kulkee pisteen

a) (1, –2) **b)** (–5, –3) kautta.

E4 **35.** Määritä suoran yhtälö ratkaistussa muodossa, kun suora kulkee

a) pisteen (–1, 12) kautta ja kulmakerroin on 5

b) pisteiden (13, 15) ja (3, –5) kautta

c) pisteiden (–12, –6) ja (7, –6) kautta.

36. Määritä suoran yhtälön yleinen muoto, kun suora kulkee pisteiden

a) (4, –8) ja (13, 10) **b)** (–1, 5) ja (4, 6) kautta.

E5

37. Suoran s yhtälö on $y = -\frac{5}{2}x + 1$. Suoran t yhtälö on $4ax - y - 7a = 0$ ja se kulkee pisteen $(5, -13)$ kautta.

a) Määritä vakio a ja suoran t kulmakerroin.

b) Laske suorien s ja t leikkauspiste.

38. Suoran yhtälö on $2y - 7cx + 4c = 0$. Määritä vakio c siten, että eräs suoran pisteistä on

a) $(12, -35)$ **b)** $(-18, 26)$.

39. Suora t kulkee pisteen $(10, 37)$ kautta ja sen kulmakerroin on 4. Suoran s yhtälö on $2x - 5y - 6 = 0$. Laske suorien leikkauspiste.

E6

40. Suora kulkee pisteiden $(5a - 3, -11)$ ja $(-2a, 1)$ kautta.

a) Määritä vakio a siten, että suora on nouseva.

b) Määritä vakio a siten, että suoran kulmakerroin on -3. Mikä on suoran yhtälö?

41. Suora kulkee pisteiden $(4a, -7)$ ja $(2a - 1, 3)$ kautta. Määritä vakio a siten, että

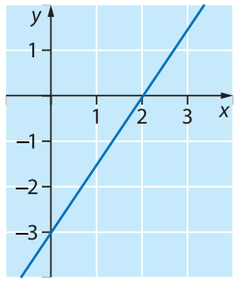
a) suora on laskeva

b) suoran kulmakerroin on -15.

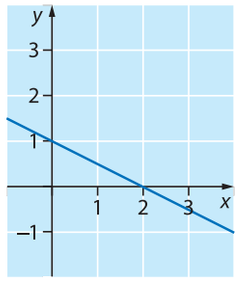
Sekalaisia

42. Määritä kuvassa olevan suoran yhtälö.

a)



b)



43. Määritä suoran kulmakerroin ja kulkusuunta, kun suora kulkee pisteiden

a) (1, 33) ja (5, 21)

b) (8, 2) ja (–20, –12) kautta.

44. Määritä suoran yhtälö, kun

a) suoran kulmakerroin on –3 ja suora kulkee pisteen (0, 4) kautta

b) suoran kulmakerroin on $-\frac{5}{3}$ ja suora kulkee pisteen (6, –7) kautta

c) suora kulkee pisteiden (–12, 5) ja (–3, 32) kautta.

---

45. Onko suorien $x - 3y + 3 = 0$ ja $3x - 10y + 1 = 0$ leikkauspiste suoralla $y = -\frac{4}{3}x - 44$?

46. Suora l kulkee pisteiden $(3, 4a - 2)$ ja $(-1, a + 1)$ kautta.

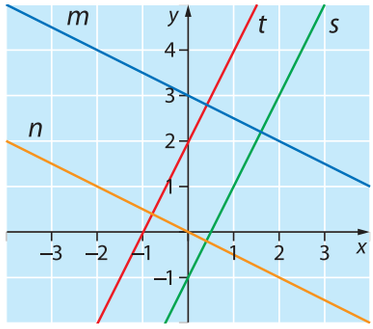
a) Määritä vakio a siten, että suora l on nouseva.

b) Määritä vakio a siten, että suoran l kulmakerroin on 6. Mikä on suoran yhtälö?

1.3 Yhdensuuntaisuus ja kohtisuoruus

Pohdinta 1

Tarkastellaan suoria s, t, m ja n.



a) Määritä suorien kulmakertoimet.

$k_s =$

$k_t =$

$k_m =$

$k_n =$

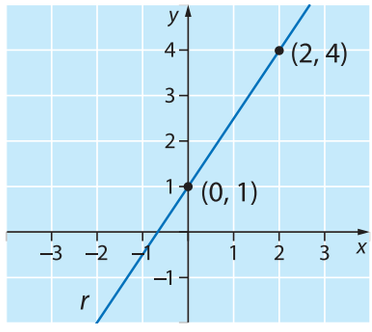
b) Mitkä suorat ovat keskenään yhdensuuntaisia?

c) Mikä kulmakertoimien avulla muodostettu ehto pätee yhdensuuntaisille suorille?

d) Anna esimerkki sellaisesta suorasta, joka on yhdensuuntainen suoran $y = -\frac{3}{2}x + 1$ kanssa.

Pohdinta 2

Piirrä kuvaan suora l, joka on kohtisuorassa suoraa r vastaan ja kulkee pisteen (0, 1) kautta.



a) Määritä suorien l ja r kulmakertoimet.

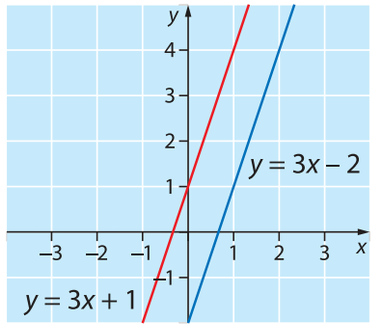
$k_l =$

$k_r =$

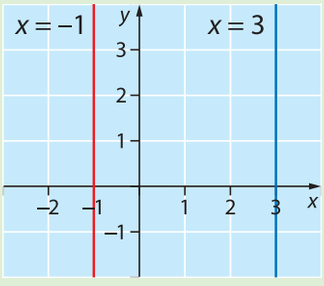
b) Päättele, mikä yhteys suorien l ja r kulmakertoimilla on.

Tarkastellaan kahta suoraa $y = 3x - 2$ ja $y = 3x + 1$. Piirretään suorien kuvaajat samaan koordinaatistoon.

- Suorilla on sama kulmakerroin $k = 3$.
- Suorilla on eri vakiotermit, joten suorat leikkaavat y-akselin eri kohdassa.



y-akselin suuntaiset suorat ovat yhdensuuntaisia, mutta niillä ei ole kulmakerrointa.



Jos suorilla on **sama kulmakerroin**, mutta eri vakiotermit, ne eivät leikkaa toisiaan. Tällaisia suoria kutsutaan **yhdensuuntaisiksi**.

Koska yhdensuuntaisilla suorilla ei ole leikkauspisteitä, niiden muodostamalla yhtälöparilla ei ole ratkaisua.

$$\begin{cases} y = 3x - 2 \\ y = 3x + 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 3x - 2 &= 3x + 1 \\ 3x - 3x &= 1 + 2 \\ 0 &= 3 \end{aligned}$$

Saatu väite on epätosi, joten suorilla ei ole leikkauspistettä.

Jos suorien kulmakertoimet eivät ole yhtä suuret, suorat ovat **erisuuntaisia**.

Yhdensuuntaisuus

Kaksi suoraa s ja t ovat yhdensuuntaisia eli $s \parallel t$, jos kulmakertoimet ovat samat.

$k_s = k_t$

ESIMERKKI 1

Tutki,

a) ovatko suorat $y = -2x + 5$ ja $y = -3x + 5$ yhdensuuntaiset

b) leikkaavatko suorat $y = -\frac{3}{2}x + 1$ ja $3y + 2x + 6 = 0$ toisensa.

RATKAISU

a) Suorat ovat yhdensuuntaiset, jos niiden kulmakertoimet ovat samat.

- Suoran $y = -2x + 5$ kulmakerroin on $k = -2$.
- Suoran $y = -3x + 5$ kulmakerroin on $k = -3$.

Kulmakertoimet ovat eri suuret, $-2 \neq -3$, joten suorat eivät ole yhdensuuntaiset.

b) Määritetään suorien kulmakertoimet.

Suoran $y = -\frac{3}{2}x + 1$ kulmakerroin on $k = -\frac{3}{2}$.

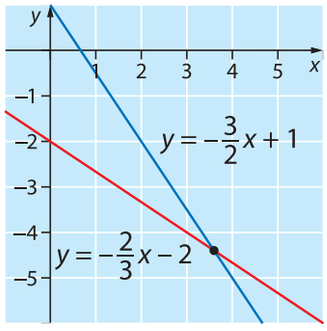
Suoran $3y + 2x + 6 = 0$ kulmakerroin saadaan ratkaistusta muodosta.

$$3y + 2x + 6 = 0$$

$$3y = -2x - 6 \qquad \big| : 3$$

$$y = -\frac{2}{3}x - 2$$

Kulmakertoimet ovat eri suuret, $-\frac{3}{2} \neq -\frac{2}{3}$, joten suorat ovat erisuuntaiset. Erisuuntaiset suorat leikkaavat toisensa.



VASTAUS

a) Eivät ole. **b)** Leikkaavat.

ESIMERKKI 2

Määritä

a) sen suoran yhtälö, joka kulkee pisteen $(4, -2)$ kautta ja on yhdensuuntainen suoran $4y - x + 7 = 0$ kanssa.

b) vakio a siten, että suora $y + 3ax + 2 = 0$ on yhdensuuntainen suoran $y = -5x + 3$ kanssa.

RATKAISU

a) Yhdensuuntaisten suorien kulmakertoimet ovat samat, joten määritetään ensin suoran $4y - x + 7 = 0$ kulmakerroin.

$$4y - x + 7 = 0$$

$$4y = x - 7 \qquad | : 4$$

$$y = \frac{1}{4}x - \frac{7}{4}$$

Yhtälö muutetaan ratkaistuun muotoon, josta nähdään kulmakerroin.

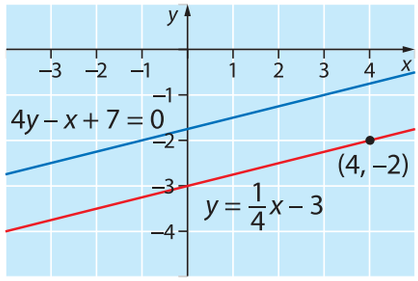
Kysytyn suoran kulmakerroin on siis $k = \frac{1}{4}$. Lisäksi tiedetään, että suora kulkee pisteen $(4, -2)$ kautta. Muodostetaan suoran yhtälö.

$y - y_0 = k(x - x_0)$

$$y - (-2) = \frac{1}{4}(x - 4)$$

$$y + 2 = \frac{1}{4}x - 1$$

$$y = \frac{1}{4}x - 3$$

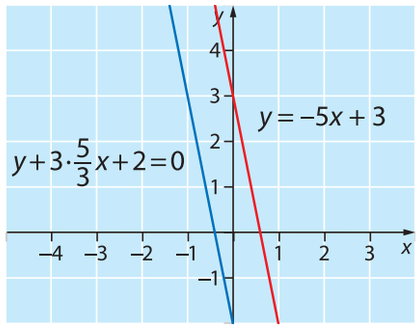


b) Suorat ovat yhdensuuntaiset, jos niiden kulmakertoimet ovat samat. Suoran $y = -5x + 3$ kulmakerroin on -5. Määritetään suoran $y + 3ax + 2 = 0$ kulmakerroin.

$$y + 3ax + 2 = 0$$

$$y = -3ax - 2$$

Kulmakerroin on termin x kerroin eli $-3a$.
Merkitään kulmakertoimet yhtä suuriksi ja ratkaistaan yhtälö.



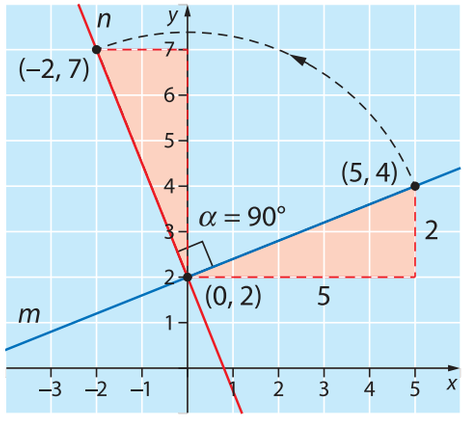
$$-3a = -5 \qquad | : (-3)$$

$$a = \frac{5}{3}$$

VASTAUS **a)** $y = \frac{1}{4}x - 3$ **b)** $a = \frac{5}{3}$

Tarkastellaan kahta suoraa m ja n, jotka ovat **kohtisuorassa** toisiaan vastaan.

Kun suoraa m kierretään pisteen $(0, 2)$ ympäri $90°$ saadaan suora n.



Koska suorien välinen kulma on $90°$, suoraa n kutsutaan suoran m **normaaliksi**.

Lasketaan suorien m ja n kulmakertoimet.

$$k_m = \frac{4-2}{5-0} = \frac{2}{5}$$

$$k_n = \frac{7-2}{-2-0} = \frac{5}{-2} = -\frac{5}{2}$$

Suoran n kulmakerroin on suoran m kulmakertoimen käänteisluvun vastaluku.

Lasketaan suorien m ja n kulmakertoimien tulo.

$$k_m \cdot k_n = \frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{10}{10} = -1$$

Kohtisuorien suorien kulmakertoimien tulo on aina -1. Poikkeuksena ovat koordinaattiakseleiden suuntaiset suorat, jotka ovat kohtisuorassa, vaikka kulmakertoimien tuloa ei voida laskea.

y-akselin suuntaisella suoralla ei ole kulmakerrointa.

Kohtisuoruus

Kaksi suoraa m ja n ovat kohtisuorassa eli $m \perp n$, jos kulmakertoimien tulo on -1.

$$k_m \cdot k_n = -1$$

ESIMERKKI 3

Tutki, ovatko suorat

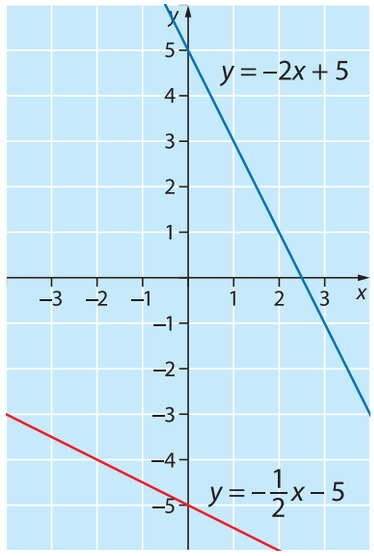
a) $y = -2x + 5$ ja $y = -\frac{1}{2}x - 5$ kohtisuorassa toisiaan vastaan

b) $7x + y - 2 = 0$ ja $7y - x - 1 = 0$ toistensa normaaleja.

RATKAISU

a) Jos suorat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, kulmakertoimien tulo on -1.

- Suoran $y = -2x + 5$ kulmakerroin on -2.
- Suoran $y = -\frac{1}{2}x - 5$ kulmakerroin on $-\frac{1}{2}$.



Lasketaan kulmakertoimien tulo.

$$-2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 1 \neq -1$$

Koska tulo ei ole -1, suorat eivät ole kohtisuorassa.

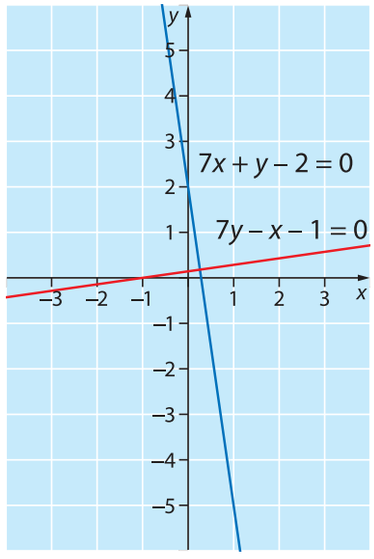
b) Suorat ovat toistensa normaaleja, jos ne ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Kulmakertoimet nähdään suorien yhtälöiden ratkaistuista muodoista.

$$7x + y - 2 = 0$$
$$y = -7x + 2$$

Kulmakerroin on -7.

$$7y - x - 1 = 0$$
$$7y = x + 1 \qquad | : 7$$
$$y = \frac{1}{7}x + \frac{1}{7}$$

Kulmakerroin on $\frac{1}{7}$.



Kulmakertoimien tulo $-7 \cdot \frac{1}{7} = -1$.

Suorat ovat toistensa normaaleja.

VASTAUS **a)** Eivät ole. **b)** Ovat.

ESIMERKKI 4

Suora s kulkee pisteen $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$ kautta ja on suoran $y = -2x + 1$ normaali.

a) Määritä suoran s yhtälö.

b) Missä pisteessä suora s leikkaa koordinaattiakselit?

RATKAISU

a) Suoran $y = -2x + 1$ kulmakerroin on -2. Merkitään normaalin kulmakerrointa kirjaimella k.

Koska suorat ovat toistensa normaaleja, niiden kulmakertoimien tulo on -1. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä k.

$$-2 \cdot k = -1 \qquad \big| :(-2)$$

$$k = \frac{1}{2}$$

Normaalin eli suoran s yhtälö on

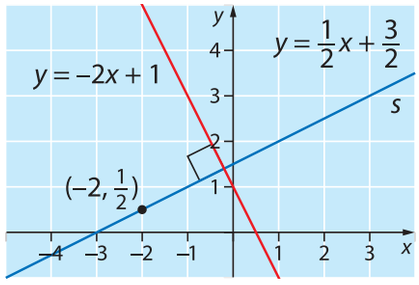
$y - y_0 = k(x - x_0)$

$$y - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x - (-2))$$

$$y - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x + 2)$$

$$y - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}x + 1$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$



b) Ratkaistusta muodosta nähdään y-akselin leikkauspiste $\left(0, \frac{3}{2}\right)$.

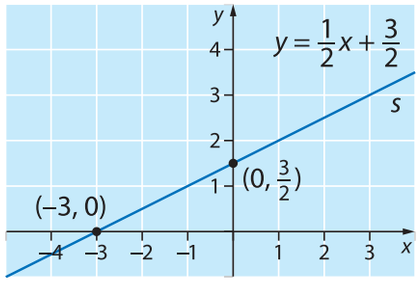
Suoran ja x-akselin leikkauspisteessä y-koordinaatti on 0.

$$\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = 0$$

$$\frac{1}{2}x = -\frac{3}{2} \qquad \big| \cdot 2$$

$$x = -3$$

Leikkauspiste on siis $(-3, 0)$.



VASTAUS

a) $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ **b)** $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ ja $(-3, 0)$

ESIMERKKI 5

Suoran s yhtälö on $y = \frac{3}{5}x + 3$. Suora n kulkee pisteiden $(1, 2)$ ja $(c - 1, -3)$ kautta.

a) Määritä vakio c siten, että suora n on suoran s normaali.

b) Laske suorien n ja s leikkauspiste.

RATKAISU

a) Suoran $y = \frac{3}{5}x + 3$ kulmakerroin on $\frac{3}{5}$. Merkitään suoran n kulmakerrointa kirjaimella k. Kohtisuorien suorien kulmakertoimien tulo on -1. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä k.

$$\frac{3}{5} \cdot k = -1$$

$$k = -\frac{5}{3}$$

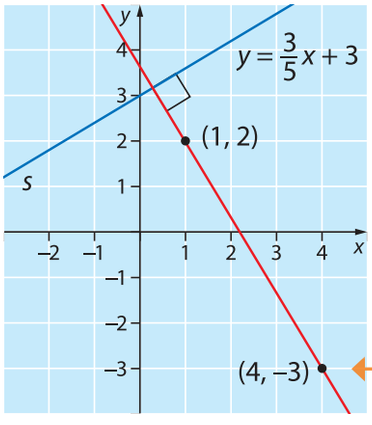
Toisaalta suora n kulkee pisteiden $(1, 2)$ ja $(c - 1, -3)$ kautta, joten suoran n kulmakerroin on

$$k = \frac{-3 - 2}{(c - 1) - 1} = \frac{-5}{c - 2}.$$

Tämän lausekkeen arvon pitää olla yhtä suuri kuin edellä määritetty kulmakertoimen arvo $-\frac{5}{3}$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä c.

$$\frac{-5}{c - 2} = -\frac{5}{3}$$

$$c = 5$$



Kun $c = 5$, toinen suoran piste on $(c - 1, 3) = (5 - 1, 3) = (4, 3)$.

b) Muodostetaan suoran n yhtälö kulmakertoimen $k = -\frac{5}{3}$ ja pisteen $(1, 2)$ avulla.

$$y - 2 = -\frac{5}{3}(x - 1)$$

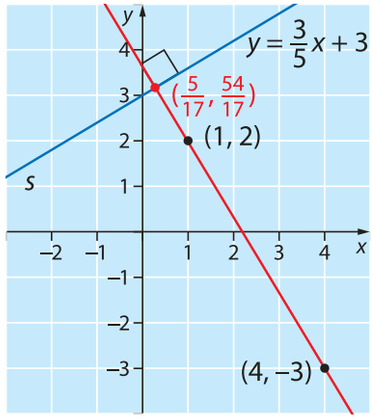
$$y = -\frac{5}{3}x + \frac{11}{3}$$

Osa laskimista antaa yhtälön muodossa $y = \frac{-5x + 11}{3}$

Leikkauspiste ratkaistaan yhtälöparin avulla.

$$\begin{cases} y = \frac{3}{5}x + 3 \\ y = -\frac{5}{3}x + \frac{11}{3} \end{cases}$$

$$x = \frac{5}{17} \text{ ja } y = \frac{54}{17}$$



Leikkauspiste on $\left(\frac{5}{17}, \frac{54}{17}\right)$.

VASTAUS **a)** $c = 5$ **b)** $\left(\frac{5}{17}, \frac{54}{17}\right)$

Laskimen tai muun apuvälineen käyttö

Yhdensuuntaisten suorien piirtäminen

Kuvaajien piirto-ohjelmalla voidaan piirtää keskenään yhdensuuntaisia suoria. Yhden suoran lisäksi tarvitaan piste, jonka kautta yhdensuuntainen suora halutaan piirtää.

Normaalin piirtäminen suoralle

Kuvaajien piirto-ohjelmalla voidaan piirtää suoralle normaali (eli kohtisuora suora). Suoran lisäksi tarvitaan piste, jonka kautta normaali kulkee.

Suorien leikkauspiste

Suorien leikkauspiste voidaan laskea yhtälöparin avulla. Leikkauspiste voidaan tarkistaa myös kuvaajasta.

Tehtävät

47. Mitkä suorista ovat yhdensuuntaisia keskenään?

A: $y = 3x - 1$ B: $y = -3x - 1$ C: $y = \frac{3}{2}x + 5$

D: $y = 3x - \frac{3}{2}$ E: $y = \frac{3}{2}x - 1$ F: $y = \frac{2}{3}x + 5$

48. Määritä jokin suora, joka on yhdensuuntainen annetun suoran kanssa.

a) $y = 2x - 3$ **b)** $x + y + 5 = 0$ **c)** $3x - 4y + 8 = 0$

E1

49. Tutki,

a) ovatko suorat $y = -\frac{1}{2}x + 3$ ja $y = -2x + 3$ yhdensuuntaiset

b) leikkaavatko suorat $y = \frac{2}{5}x - 7$ ja $5y = 2x + 15$ toisensa.

50. Tutki, ovatko suorat yhdensuuntaisia.

a) $y = x + 7$ ja $y = -4x + 7$

b) $-x + 3y + 2 = 0$ ja $y = -\frac{1}{3}x + 1$

c) $-6x + y = -5$ ja $-12x + 2y + 10 = 0$

51. Suora t kulkee pisteiden $(3, -7)$ ja $(28, 13)$ kautta. Leikkaako suora t suoran s, jonka yhtälö on $y = -\frac{4}{5}x + 11$?

52. Määritä

a) sen suoran yhtälö, joka kulkee pisteen $(6, 19)$ kautta ja on yhdensuuntainen suoran $-3y + 2x - 9 = 0$ kanssa

b) vakio c siten, että suora $y = -5cx + 8$ on yhdensuuntainen suoran $3y + 5x - 2 = 0$ kanssa.

53. Määritä suoran yhtälö, kun suora kulkee pisteen $(-16, 7)$ kautta ja on yhdensuuntainen suoran

a) $y = 2x + 3$ **b)** $-x + 8y - 24 = 0$ kanssa.

54. Määritä vakio a, siten että suora $-6ax + y - 13 = 0$ on yhdensuuntainen suoran

a) $y = -9x + 1$ **b)** $-6x + 5y - 3 = 0$ kanssa.

E3

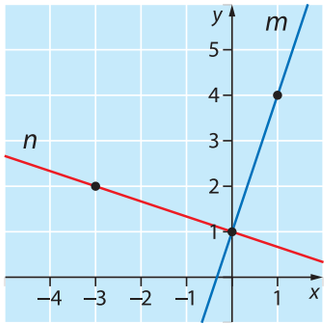
55. Tutki, ovatko suorat

a) $y = -4x - 13$ ja $y = 4x + 17$ kohtisuorassa toisiaan vastaan

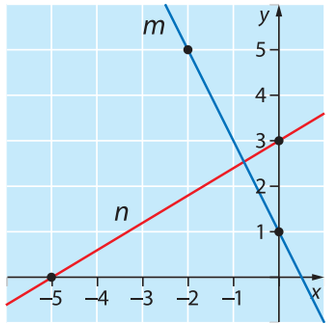
b) $7x + 5y - 20 = 0$ ja $-5x + 7y = 0$ toistensa normaaleja.

56. Tutki, ovatko kuvassa olevat suorat m ja n kohtisuorassa toisiaan vastaan. Perustele vastauksesi laskemalla kulmakertoimet.

a)



b)



E4

57. Suora t kulkee pisteen $(-9, -3)$ kautta ja on suoran $y = \frac{1}{3}x + 14$ normaali.

a) Määritä suoran t yhtälö.

b) Missä pisteessä suora t leikkaa koordinaattiakselit?

58. Suora l on suoran $y = -\frac{4}{3}x - 5$ normaali. Määritä suoran l yhtälö, kun se leikkaa

a) x-akselin pisteessä $(-8, 0)$

b) y-akselin pisteessä $(0, -25)$.

59. Suoran s yhtälö on $-3x + 4y - 2 = 0$. Suorien n ja s välinen kulma on $90°$, ja suora n kulkee pisteen $(6, 5)$ kautta.

a) Määritä suoran n yhtälö.

b) Onko piste $(60, -83)$ suoralla n?

E5

60. Suoran t yhtälö on $y = -\frac{6}{5}x - 23$. Suora n kulkee pisteiden $(2a + 1, -5)$ ja $(-3, 5)$ kautta.

a) Määritä vakio a siten, että suora n on suoran t normaali.

b) Laske suorien t ja n leikkauspiste.

61. Suora s leikkaa y-akselin pisteessä $(0, 6)$ ja on suoran $y = 4x + 1$ suuntainen. Suora m leikkaa x-akselin pisteessä $(-5, 0)$ ja on kohtisuorassa suoraa $y = -2x + 1$ vastaan.

a) Määritä suorien s ja m leikkauspiste.

b) Onko piste $(3, 4)$ suoralla m?

62. Suoran $y = -7x + 1$ normaali kulkee pisteiden $(-10, 21)$ ja $(c - 5, -1)$ kautta.

a) Määritä vakio c.

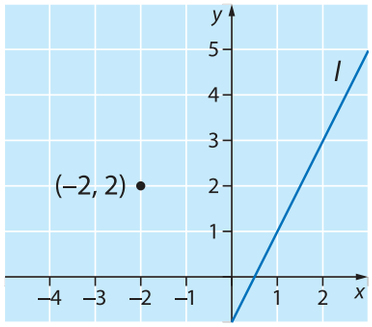
b) Määritä normaalin yhtälö.

c) Missä pisteessä suorat leikkaavat?

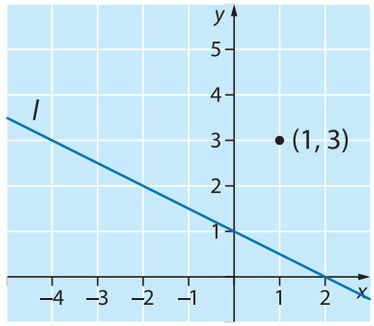
Sekalaisia

63. Määritä suoran l kanssa yhdensuuntainen suora, joka kulkee annetun pisteen kautta.

a) $(-2, 2)$

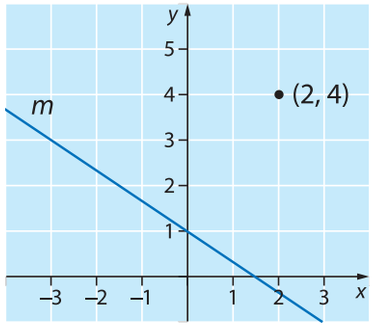


b) $(1, 3)$

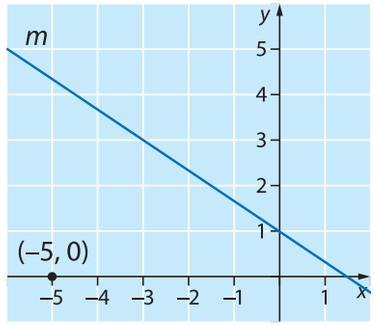


64. Määritä suoran m normaali, kun normaali kulkee annetun pisteen kautta.

a) $(2, 4)$



b) $(-5, 0)$



65. Määritä suoran $y = kx + 4$ kulmakerroin k siten, että suora on

a) kohtisuorassa suoraa $4x - 7y + 3 = 0$ vastaan

b) yhdensuuntainen suoran $-x - 5y + 20 = 0$ kanssa.

---

66. Suora t kulkee pisteiden $(0, -9)$ ja $(2c, 15)$ kautta. Määritä vakio c ja suoran t yhtälö, kun suora t on

a) yhdensuuntainen suoran $6x + y - 17 = 0$ kanssa

b) kohtisuorassa suoraa $y = -\frac{1}{2}x + 8$ vastaan.

67. Suora $-5ax + 3y - 22 = 0$ on suoran $y = \frac{1}{10}x - 5$ normaali.

a) Määritä vakio a.

b) Määritä normaalin yhtälö ratkaistussa muodossa.

c) Onko piste $(1, -9)$ normaalilla?

1.4 Sovelluksia lineaarisesta mallista

Pohdinta

Vakiotilavuudessa kaasun paine riippuu lineaarisesti lämpötilasta. Astiaan suljetaan hiilidioksidia. Kun kaasun lämpötila on 280 kelviniä (K), paine astiassa on 1,2 baaria (bar). Kun lämpötilaa nostetaan 20 kelvinillä, paine nousee 0,2 baaria.

a) Koska riippuvuus lämpötilan ja paineen välillä on lineaarista, tilannetta voidaan mallintaa suoran yhtälön avulla. Merkitään lämpötilaa kirjaimella x ja painetta kirjaimella y. Määritä annettujen tietojen avulla kaksi suoran pistettä (x, y).

b) Laske suoran kulmakerroin.

c) Määritä suoran yhtälö.

d) Laske suoran yhtälön avulla paine, kun lämpötila on 350 K.

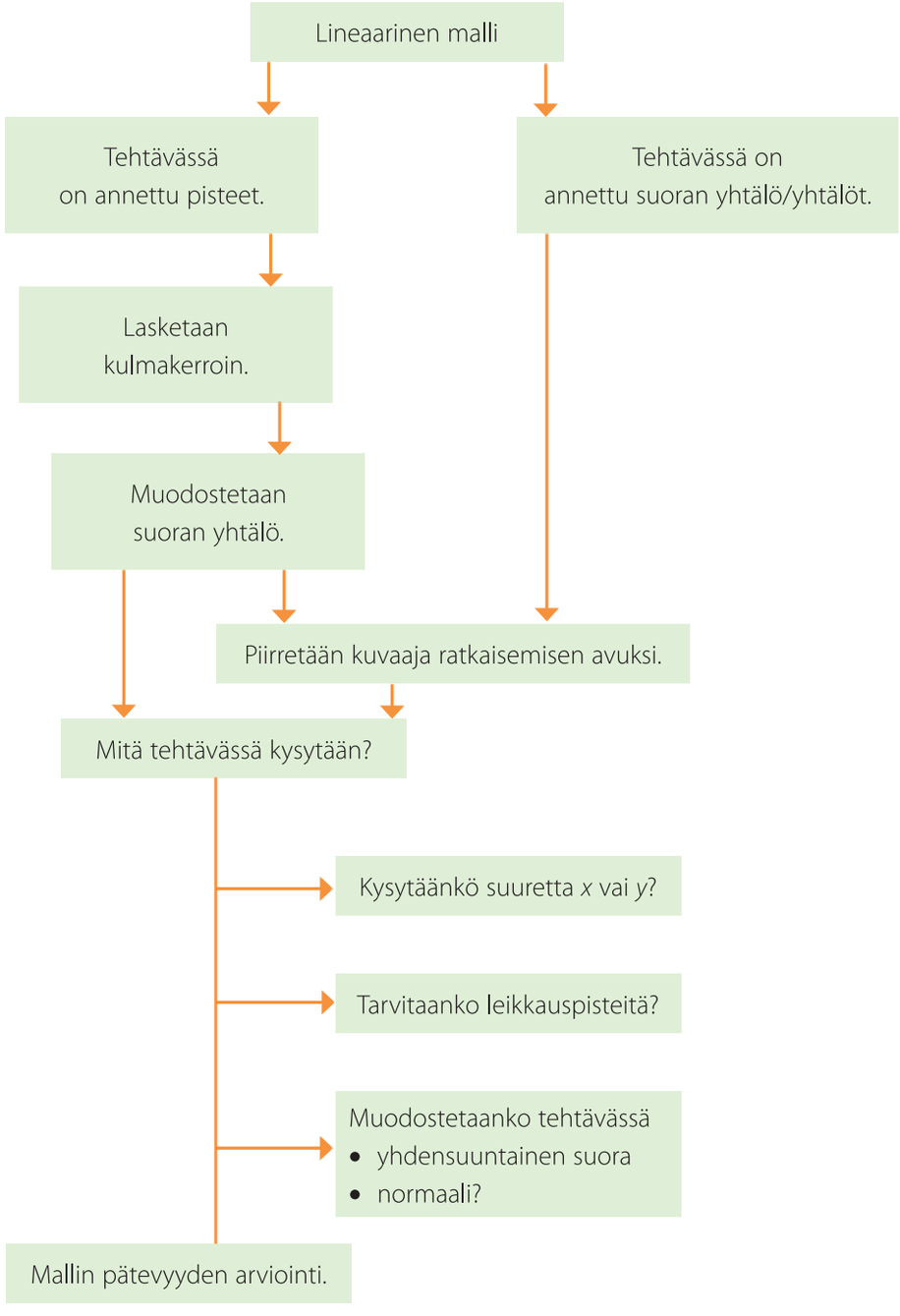
e) Missä lämpötilassa paine olisi 4,6 bar?

f) Absoluuttisessa nollapisteessä lämpötila on 0 K. Arvioi mallin toimivuutta tässä lämpötilassa.

Jos kaksi suuretta riippuu toisistaan lineaarisesti eli suoraviivaisesti, tilannetta voidaan mallintaa suoran yhtälön avulla. Suoran yhtälön muodostamiseen tarvitaan

- kaksi pistettä tai
- kulmakerroin ja yksi piste.

Sovellustehtävät ratkaistaan muodostetun suoran yhtälön avulla. Joskus malli eli suoran yhtälö annetaan tehtävässä valmiina. Tällöin on ymmärrettävä, mitä suureita mallin avulla on määritettävä. Sovellustehtävissä kannattaa usein lisäksi piirtää koordinaatistoon tarkasteltavien suorien kuvaajat.



ESIMERKKI 1

Espanja on tunnettu hienoista rannoistaan. Rantoja on rakennettu viime vuosikymmeninä niin nopeasti, että luonnontilaisten rantojen pelätään katoavan kokonaan. Rantaviivan pituus vuonna 2016 oli 7900 km. Asunnot, liiketilat ja muu infrastruktuuri valtaavat rantaa siten, että vuonna 2022 luonnonrantaa ennustetaan olevan 7762 km.

a) Oletetaan, että luonnonrantaviivan pituus vähenee lineaarisesti vuodesta 2016 alkaen. Määritä suoran yhtälö, joka kuvaa luonnonrantaviivan pituutta y (km), kun x on aika vuosina alkaen vuodesta 2016.

b) Mikä on rantaviivan pituus vuonna 2030?

c) Missä ajassa luonnonrantojen arvioidaan katoavan kokonaan?

RATKAISU

a) Suoran yhtälön muodostamiseen tarvitaan kaksi pistettä. Koska x on aika vuosina vuodesta 2016 alkaen, $x = 0$ tarkastelun alkuhetkellä eli vuonna 2016. Vuoteen 2022 mennessä on kulunut 6 vuotta alkuhetkestä, joten $x = 6$.

x (a)	y (km)	(x, y)
0	7900	(0, 7900)
6	7762	(6, 7762)

Suoran kulmakerroin

$k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$k = \frac{7762 - 7900}{6 - 0} = -23$$

Lisäksi valitaan tunnetuksi pisteeksi $(x_0, y_0) = (0, 7900)$, joten suoran yhtälöksi saadaan

$y - y_0 = k(x - x_0)$
Koska tunnettu piste on y-akselin leikkauskohta, yhtälö saataisiin myös suoraan ilman edellä olevaa sääntöä.

$$y - 7900 = -23(x - 0)$$
$$y = -23x + 7900$$

b) Vuoteen 2030 on kulunut $2030 - 2016 = 14$ vuotta eli $x = 14$. Rantaviivan pituus, kun $x = 14$, on

$$y = -23 \cdot 14 + 7900 = 7578 \text{ (km)}$$

c) Kulunut aika saadaan, kun luonnonrantaviivan pituus $y = 0$.

$$-23x + 7900 = 0$$
$$x = 343,47... \approx 343 \text{ (a)}$$

VASTAUS **a)** $y = -23x + 7900$ **b)** 7578 km **c)** 343 vuodessa

ESIMERKKI 2

Sanni ja Kia juoksevat saman 15 km:n lenkin. He lähtevät juoksemaan samaan suuntaan, mutta eri aikaan. Sanni lähtee lenkille ennen Kiaa. Kian juoksemaa matkaa y (km) kuvaa yhtälö $y = 20x$ ja Sannin juoksemaa matkaa (km) yhtälö $y = 2{,}5 + 16x$, missä x on Kian lähdöstä kulunut aika (h).

a) Kuinka kaukana Sanni on sillä hetkellä kun Kia lähtee?
b) Kumpi tytöistä juoksee suuremmalla nopeudella?
c) Milloin Kia saavuttaa Sannin? Anna vastaus minuutteina.
d) Kuinka monta kilometriä on juostu kohtaamishetkeen mennessä?

RATKAISU

a) Kian lähtöhetkellä $x = 0$, jolloin Sannin juoksema matka on

$$y = 2{,}5 + 16 \cdot 0 = 2{,}5 \text{ (km)}.$$

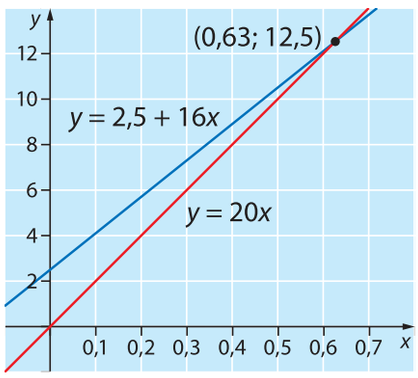
Sanni on siis 2,5 kilometrin päässä.

b) Yhtälön $y = 20x$ kulmakertoimesta $k = 20$ nähdään, että Kian matka kasvaa 20 km tuntia kohden. Kian juoksunopeus on 20 km/h.

Yhtälön $y = 2{,}5 + 16x$ kulmakertoimesta $k = 16$ nähdään, että Sannin matka kasvaa tarkastelun alusta alkaen 16 km tunnissa. Sannin juoksunopeus on 16 km/h.

Kian juoksunopeus on suurempi.

c) Kia ja Sanni lähtivät juoksemaan samaan suuntaan. Kohtaamishetkellä molemmat ovat juosseet saman matkan. Merkitään matkan lausekkeet yhtä suuriksi ja ratkaistaan yhtälö.



$$2{,}5 + 16x = 20x$$
$$x = 0{,}625 \text{ (h)}$$

Muutetaan saatu aika minuuteiksi: $0{,}625 \cdot 60 \text{ min} = 37{,}5 \text{ min} \approx 38 \text{ min}$

Arvo $x = 0{,}625$ (h) voidaan sijoittaa myös toiseen yhtälöön: $2{,}5 + 16 \cdot 0{,}625 = 12{,}5$ (km).

d) Kohtaamishetkellä $x = 0{,}625$ (h), joten matka

$$y = 20 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 0{,}625 \text{ h} = 12{,}5 \text{ km}.$$

VASTAUS **a)** 2,5 km:n päässä **b)** Kia **c)** 38 min **d)** 12,5 km

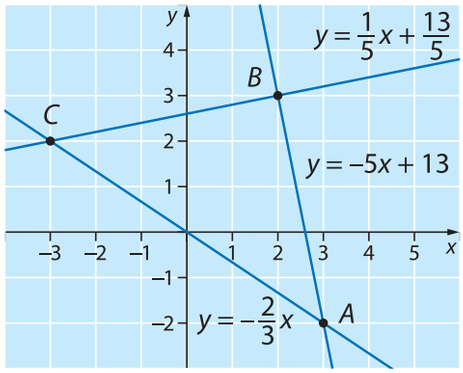
ESIMERKKI 3

Suorat $y = -5x + 13$, $y = \frac{1}{5}x + \frac{13}{5}$ ja $y = -\frac{2}{3}x$ rajaavat kolmion.

a) Laske monikulmion kärkipisteet.
b) Osoita, että kolmio on suorakulmainen.
c) Laske kolmion pinta-ala.

RATKAISU

a) Piirretään suorat samaan koordinaatistoon. Merkitään kolmion kärkipisteitä A, B ja C.



Kärkipisteet eli suorien leikkauspisteet saadaan ratkaisemalla kolme yhtälöparia.

Piste A

$$\begin{cases} y = -\frac{2}{3}x \\ y = -5x + 13 \end{cases}$$

$x = 3$ ja $y = -2$

Piste B

$$\begin{cases} y = -5x + 13 \\ y = \frac{1}{5}x + \frac{13}{5} \end{cases}$$

$x = 2$ ja $y = 3$

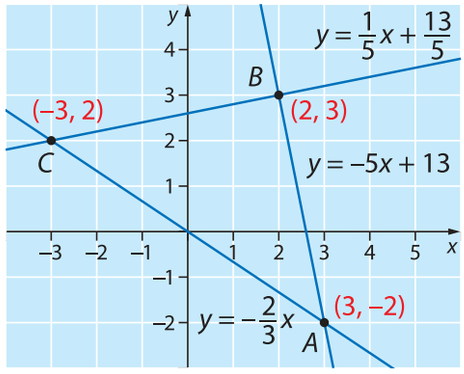
Piste C

$$\begin{cases} y = \frac{1}{5}x + \frac{13}{5} \\ y = -\frac{2}{3}x \end{cases}$$

$x = -3$ ja $y = 2$

Yhtälöpari ratkaistaan laskinohjelmistolla sopivalla komennolla.

Kärkipisteet ovat siis: (3, −2), (2, 3) ja (−3, 2).

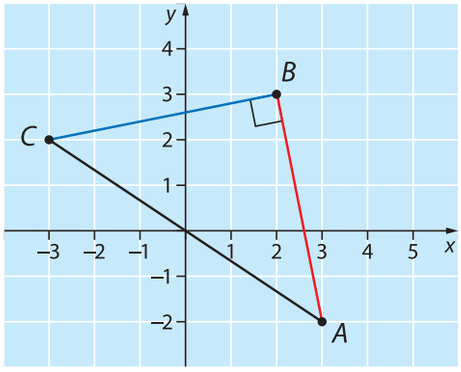


b) Kolmio on suorakulmainen, jos kaksi suorista on kohtisuorassa toisiaan vastaan. Tällöin suorien kulmakertoimien tulo on -1.

- Suoran $y = -5x + 13$ kulmakerroin on -5.
- Suoran $y = \frac{1}{5}x + \frac{13}{5}$ kulmakerroin on $\frac{1}{5}$.

Kulmakertoimien tulo on $-5 \cdot \frac{1}{5} = -1$ eli kolmio on siis suorakulmainen.

c) Kolmion kannan pituus on pisteiden $B(2, 3)$ ja $C(-3, 2)$ etäisyys.



Jos janan päätepisteet ovat: (x_1, y_1) ja (x_2, y_2), niin janan pituus on $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Kolmion kannan pituus:

$$\sqrt{(-3-2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{26}$$

Kolmion korkeus on pisteiden $A(3, -2)$ja $B(2, 3)$ etäisyys.

Kolmion korkeus:

$$\sqrt{(2-3)^2 + (3-(-2))^2} = \sqrt{26}$$

Lasketaan kolmion pinta-ala.

$$A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{26} \cdot \sqrt{26} = 13$$

Kolmion pinta-ala

$A = \frac{1}{2} \cdot$ kanta $\cdot$ korkeus

VASTAUS **a)** $(3, -2)$, $(2, 3)$ ja $(-3, 2)$ **c)** $A = 13$

ESIMERKKI 4

Voimalinjaa kuvaa kartalla kaksi yhdensuuntaista suoraa l ja r. Suoran l yhtälö on $y = -x + 10$ ja suora r kulkee pisteen (6, 9) kautta.

a) Määritä suoran r yhtälö.

b) Kuinka leveä voimalinja on, kun kartalla yksi yksikkö vastaa 10 metriä?

RATKAISU

a) Suora r on yhdensuuntainen suoran l kanssa, joten niiden kulmakertoimet ovat yhtä suuret.

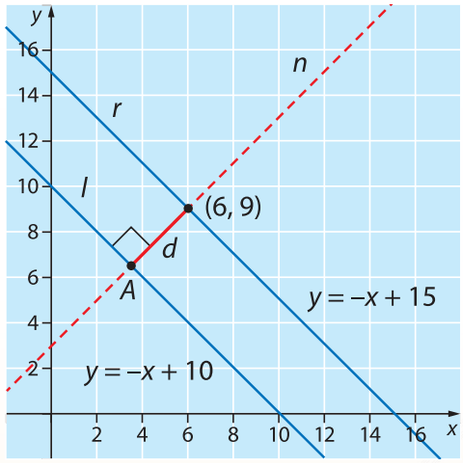
$$k_r = k_l = -1$$

Suora r kulkee pisteen (6, 9) kautta. Muodostetaan suoran yhtälö.

$$y - 9 = -1(x - 6)$$

$$y = -x + 15$$

b) Piirretään kuva voimalinjasta. Voimalinjan leveys on suorien kohtisuora etäisyys. Piirretään pisteen (6, 9) kautta suoralle $y = -x + 10$ normaali n. Merkitään suoran ja sen normaalin leikkauspistettä kirjaimella A ja voimalinjan leveyttä kirjaimella d.



Voimalinjan leveys d on pisteiden (6, 9) ja A välinen etäisyys. Piste A on normaalilla, joten määritetään ensin normaalin yhtälö.

$k_1 \cdot k_n = -1$

$-1 \cdot k_n = -1$

$k_n = 1$

Koska suoran l kulmakerroin $k_l = -1$, niin normaalin n kulmakerroin $k_n = 1$. Muodostetaan normaalin yhtälö kulmakertoimen $k_n = 1$ ja pisteen (6, 9) avulla.

$$y - 9 = 1(x - 6)$$

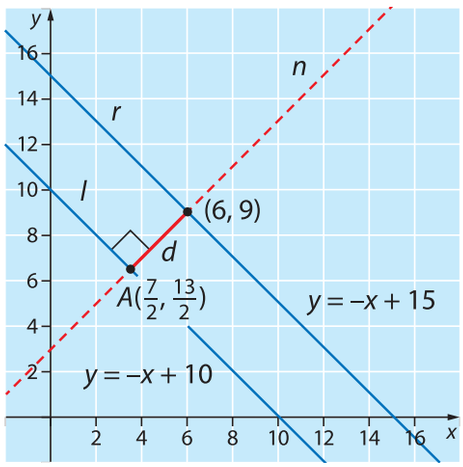
$$y = x + 3$$

Lasketaan suorien leikkauspisteen A koordinaatit yhtälöparin avulla.

$$\begin{cases} y = -x + 10 \\ y = x + 3 \end{cases}$$

$$x = \frac{7}{2} \text{ ja } y = \frac{13}{2}$$

Leikkauspisteen A koordinaatit ovat $\left(\frac{7}{2}, \frac{13}{2}\right)$.



Lasketaan pisteiden $A\left(\frac{7}{2}, \frac{13}{2}\right)$ ja (6, 9) välinen etäisyys.

$$d = \sqrt{\left(6 - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(9 - \frac{13}{2}\right)^2} = \frac{5\sqrt{2}}{2} = 3{,}5355...$$

Koordinaatiston yksikkö on 10 m, joten etäisyys on

$3{,}535\ldots \cdot 10 \text{ m} \approx 35 \text{ m}$.

VASTAUS **a)** $y = -x + 15$ **b)** 35 m

Tehtävät

68. Kaupungin kaksi päänähtävyyttä sijaitsevat saman kadun varrella. Kartalla oleva monumentti sijaitsee pisteessä (34, 23) ja kirkko pisteessä (–5, 75).

a) Määritä katua kuvaavan suoran yhtälö

b) Millä muuttujan x arvoilla suoran yhtälö on pätevä, jos nähtävyydet sijaitsevat kadun päätepisteissä?

c) Metroaseman sisäänkäynti on pisteessä (30, 27). Sijaitseeko sisäänkäynti kadulla?

E1

69. Laajan levinneisyyden ja vakiintuneen kannan takia susi on luokiteltu elinvoimaiseksi lajiksi. Riista- ja kalatalouden tutkimuslaitoksen arvioiden mukaan vuonna 2009 susien määrä oli 160 yksilöä ja vuonna 2013 määrän arvioitiin olevan 208 yksilöä.

a) Oletetaan, että susien määrä on kasvanut lineaarisesti vuodesta 2009 alkaen. Määritä suoran yhtälö, joka kuvaa susien määrää y, kun x on aika vuosina alkaen vuodesta 2009.

b) Mikä on mallin mukaan susien määrä vuonna 2016?

c) Metsästyslupia myönnetään kannanhoidollisista syistä, kun susien arvioitu määrä ylittää 250 yksilöä. Minä vuonna tämän arvioidaan tapahtuvan?

70. Syksyllä valoisan ajan määrä Suomessa riippuu lineaarisesti paikkakunnan leveyspiiristä. Rovaniemi sijaitsee pohjoisella leveyspiirillä 66,5° ja siellä on lokakuussa valoisaa 500 minuuttia. Tampereen leveyspiiri on 61,5° ja siellä valoisaa aikaa on 590 minuuttia.

a) Muodosta leveyspiirin x ja valoisan ajan y välistä riippuvuutta kuvaavan suoran yhtälö.

b) Kuinka paljon valoisaa aikaa on Kuopiossa, jonka leveyspiiri on 62,9°?

c) Helsingissä valoisaa aikaa oli 600 minuuttia. Millä leveyspiirillä Helsinki tämän mallin perusteella sijaitsee?

71. Tasaisessa liikkeessä matkan y (km) ja matkaan käytetyn ajan x (min) riippuvuutta kuvaa suora. Kun aikaa oli kulunut 30 min lähdöstä, kuljettu matka oli 37,5 km. Tästä hetkestä 18 minuutin kuluttua etäisyys lähtöpaikasta oli 60 km.

a) Määritä matkan y (km) riippuvuutta ajasta x (h) kuvaavan suoran yhtälö.

b) Kuinka kauan kestää, että päästään 340 km:n päähän? Ilmoita vastaus minuutin tarkkuudella.

c) Kuinka pitkä matka on kuljettu, kun aikaa on kulunut 2 h?

72. Kohonnut verenpaine lisää riskiä sairastua sydän- ja verisuonitauteihin. Suomalaisten verenpainetaso on laskenut merkittävästi 1970-luvun alusta. Mittayksikkönä käytetään elohopeamillimetriä, mmHg. Eräässä tutkimuksessa työikäisten miesten systolisen verenpaineen keskiarvo oli 147 mmHg vuonna 1972 ja laski vuoteen 2002 saakka 137 mmHg tasolle. Naisilla vastaavat arvot olivat 150 mmHg vuonna 1972 ja 133 mmHg vuonna 2002. Oletetaan, että systolinen verenpaine laskee miehillä ja naisilla likimain lineaarisesti tutkitulla aikavälillä.

a) Määritä suoran yhtälöt, jotka kuvaavat naisten ja miesten verenpaineen arvoa y (mmHg), kun vuodesta 1972 on kulunut x vuotta.

b) Milloin miesten verenpaine oli laskenut keskimäärin tasolle 140 mmHg?

c) Mikä oli keskimääräinen naisten verenpaine vuonna 1998?

E2 **73.** Fysiikan tunnilla tutkittiin nopeuden riippuvuutta ajasta tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä. Moottoripyörän nopeutta y (m/s) kuvaa yhtälö $y = 0{,}64x + 11{,}1$ ja auton nopeutta (m/s) yhtälö $y = 0{,}5x + 20$, jossa x on tarkastelun alusta kulunut aika (s).

a) Kummalla on suurempi nopeus tarkastelun alkaessa?

b) Kummalla on suurempi kiihtyvyys?

c) Milloin ajoneuvot saavuttavat saman nopeuden ja kuinka suuri tämä nopeus on?

74. Kaksi energiayhtiötä tarjoaa sähkösopimusta. Yhtiö A:n tarjoaman sopimuksen vuotuista kustannusta y (€) kuvaa yhtälö $y = 154{,}8 + 0{,}0048x$ ja yhtiö B:n sopimuksen vuotuista kustannusta yhtälö $y = 0{,}019x$, joissa x kuvaa vuotuista energian käyttöä (kWh).

a) Yhtiö A perii vuotuisen kulutuksen lisäksi perusmaksun. Kuinka suuri perusmaksu on?

b) Kuinka paljon yhtiö B veloittaa yhdeltä kilowattitunnilta?

c) Millaisilla vuotuisilla käyttömäärillä (kWh) kannattaa valita yhtiö A? Anna vastaus kilowattitunnin tarkkuudella.

75. Kahden harrastuksen vuotuiset kustannukset riippuvat harrastekerroista. Liikuntakerhon kustannuksia y (€) kuvaa yhtälö $y = 56 + 3{,}8x$ ja askartelukerhon kustannuksia yhtälö $y = 35 + 4{,}5x$, joissa x on osallistumiskertojen lukumäärä.

a) Kummassa kerhossa perusmaksu on suurempi? Perustele vastauksesi.

b) Kummassa kerhossa osallistumiskerran yksikköhinta on halvempi? Perustele vastauksesi.

c) Taina kuuluu molempiin kerhoihin. Mikä on oltava osallistumiskertojen lukumäärä molemmissa kerhoissa, jotta niiden vuotuiset kustannukset olisivat yhtä suuret?

76. Pekka ja Panu seisovat suorakulmion muotoisen pelikentän vastakkaisissa kulmissa. He lähtevät kävelemään samanaikaisesti, toisiaan vastaan, kentän lävistäjää pitkin. Pekka kävelee tasaisella nopeudella siten, että 5 sekunnin kuluttua hän on 7 m:n päässä lähtöpisteestä. Panun kävelemää matkaa y (m) alkuhetkestä alkaen kuvaa suora $y = 1{,}25x$, jossa x on kulunut aika (s).

a) Määritä suoran yhtälö, joka kuvaa Pekan kulkeman matkan y (m) riippuvuutta kuluneesta ajasta x (s).

b) Kentän lävistäjän pituus on 122 m. Kuinka monen sekunnin kuluttua pojat kohtaavat toisensa?

E3

77. Suorat $y = -2x$, $y = x - 6$ ja $y = -x + 2$ rajaavat kolmion.

a) Laske kolmio kärkipisteet.

b) Osoita, että kolmio on suorakulmainen.

c) Laske kolmion pinta-ala.

78. Maa-alue on nelikulmion muotoinen. Aluetta rajaavat suorat $y = x + 4$, $y = 2$, $y = -x + 7$ ja $y = 4$. Laske alueen

a) kärkipisteiden koordinaatit.

b) pinta-ala, kun yksi yksikkö koordinaatistossa vastaa 10 m.

E4

79. Kaupungin läpi virtaa joki. Alueen kartalla jokea kuvaa kaksi yhdensuuntaista suoraa m ja t. Suoran m yhtälö on $y = 2x + 5$ ja suora t kulkee pisteen (3, 6) kautta.

a) Määritä suoran t yhtälö.

b) Kuinka leveä joki on, kun koordinaatiston yksikkö vastaa 5 m luonnossa?

80. Kartalla, jonka yksikkönä on kilometri, erästä päätietä esittää suora $2x - 3y + 4 = 0$ ja siitä erkanevaa paikallistietä suora $x + 2y - 6 = 0$. Missä pisteessä tiet eroavat? Kuinka kaukana tienhaarasta on paikassa (4, 1) oleva talo? [S1994, 8b]

81. Kahdesta eri valolähteestä suunnataan säteet yhdensuuntaisesti. Valonsäteet kulkevat pitkin suoria $y = -\frac{2}{3}x + 6$ ja $y = -\frac{2}{3}x + 10$. Laske säteiden välinen etäisyys. Anna vastaus yhden desimaalin tarkkuudella.

Sekalaisia

82. Helsinki, Turku ja Salo ovat likipitäen samalla suoralla. Helsingin ja Turun välimatka on noin 165 km sekä Salon ja Turun välimatka noin 55 km. Helsingissä oli eräänä päivänä lämpötila 17,1 °C ja Turussa 22,3 °C. Lämpötila muuttui tasaisesti Helsingin ja Turun välillä. Mikä oli tällöin lämpötila Salossa? [S1998, 4a]

83. Eräässä tutkimuksessa männyn massan riippuvuutta tilavuudesta mallinnettiin suoran avulla. Puut, joiden tilavuus oli 0,060 m^3, painoivat kaadettuina ja karsittuina keskimäärin 25 kg. Jos puiden tilavuus oli 0,50 m^3, ne painoivat keskimäärin 168 kg.

a) Muodosta riippuvuutta kuvaavan suoran yhtälö.

b) Kuinka paljon painoivat puut, joiden tilavuus oli 1,3 m^3?

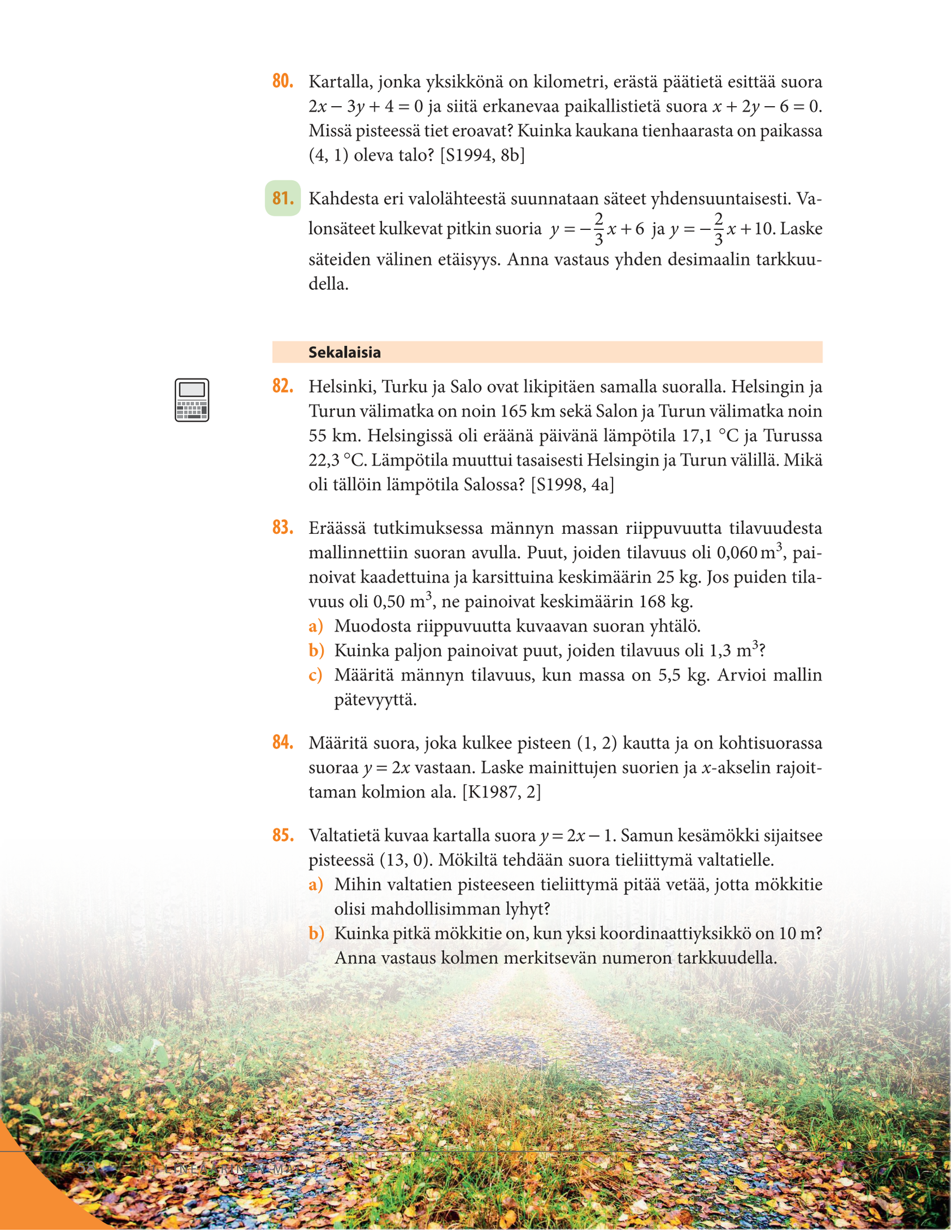
c) Määritä männyn tilavuus, kun massa on 5,5 kg. Arvioi mallin pätevyyttä.

84. Määritä suora, joka kulkee pisteen (1, 2) kautta ja on kohtisuorassa suoraa $y = 2x$ vastaan. Laske mainittujen suorien ja x-akselin rajoittaman kolmion ala. [K1987, 2]

85. Valtatietä kuvaa kartalla suora $y = 2x - 1$. Samun kesämökki sijaitsee pisteessä (13, 0). Mökiltä tehdään suora tieliittymä valtatielle.

a) Mihin valtatien pisteeseen tieliittymä pitää vetää, jotta mökkitie olisi mahdollisimman lyhyt?

b) Kuinka pitkä mökkitie on, kun yksi koordinaattiyksikkö on 10 m? Anna vastaus kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.



2 Eksponentiaalinen malli

Tavoitteena on

- oppia tunnistamaan, milloin tilannetta kuvaa eksponentiaalinen malli
- oppia erottamaan toisistaan eksponentiaalinen kasvu ja väheneminen
- oppia muodostamaan eksponentiaalinen malli
- oppia ratkaisemaan eksponentti- ja potenssiyhtälöitä
- oppia käyttää teknisiä apuvälineitä eksponenttifunktion ominaisuuksien tutkimisessa sekä eksponenttiyhtälöiden ratkaisussa sovellusongelmien yhteydessä.

- Miten funktion kuvaaja tunnistetaan eksponenttifunktioksi?
- Miten eksponenttifunktion kuvaajaa tulkitaan?
- Miten muodostetaan eksponentiaalinen malli?
- Miten eksponenttiyhtälö ratkaistaan?
- Miten potenssiyhtälö ratkaistaan?

- Miten eksponenttifunktion kuvaaja piirretään?
- Miten eksponenttifunktion kuvaajaa voidaan tutkia?
- Miten ratkaistaan eksponenttiyhtälö?
- Miten ratkaistaan potenssiyhtälö?
- Miten muodostetaan sanallisesta tilanteesta eksponentiaalinen malli?

2.1 Eksponenttifunktio

Pohdinta 1

Mooren lain mukaan transistorien määrä mikropiireissä kasvaa joka vuosi 40 % eli transistorien määrä 1,4-kertaistuu joka vuosi. Moore esitti havaintonsa vuonna 1965. Vuonna 1970 prosessori sisälsi noin 4000 transistoria.

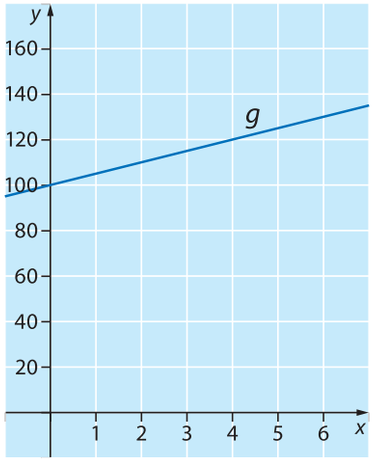
a) Täydennä taulukko ja muodosta sen avulla funktio f, joka kuvaa transistorien määrää prosessorissa, kun vuodesta 1970 on kulunut x vuotta.

Aika vuosina	Transistorien määrä
1	
2	
3	
5	
x	

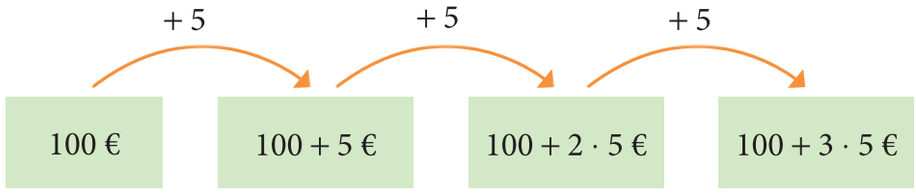
b) Piirrä funktion f kuvaaja ja päättele sen avulla transistorien määrä vuonna 1980.

c) Päättele kuvaajan avulla vuosi, jolloin transistorien määrä oli miljoona. Muuta ensin kuvaajanäkymässä akselien asteikkoja siten, että saat halutun funktion arvon näkyviin.

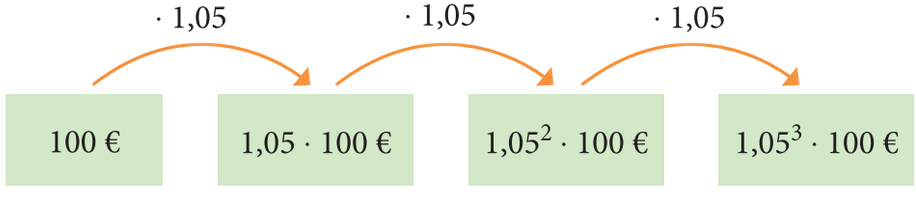
Edellisillä kursseilla on tutustuttu erilaisiin polynomifunktioihin. Näistä yksinkertaisin on ensimmäisen asteen polynomifunktio eli lineaarinen funktio.



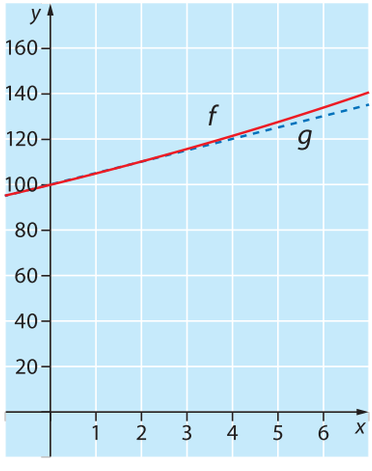
Lineaarinen malli sopii tilanteeseen, jossa suureen muutos on **absoluuttista**. Jos esimerkiksi 100 € maksavan tuotteen hinta nousee joka vuosi 5 €, tuotteen hintaa x:n vuoden jälkeen voidaan mallintaa lineaarisella funktiolla $g(x) = 100 + 5x$ (€). Tämän funktion kuvaaja on suora $y = 100 + 5x$.



Jos suureen muutos on **suhteellista**, tilannetta ei voida kuvata lineaarisella mallilla. Suhteellisessa muutoksessa suureen arvo muuttuu yhtä monta prosenttia jokaisella muutoskerralla. Jos esimerkiksi 100 € maksavan tuotteen hinta nousee vuosittain 5 %, hinta 1,05-kertaistuu joka vuosi.



Kun hintaa on nostettu x kertaa, tuotteen hinta on $1{,}05^x \cdot 100$ (€).



Hintaa kuvaava lauseke on esimerkki **eksponentiaalisesta mallista**. Vastaavasti funktiota $f(x) = 1{,}05^x \cdot 100$ sanotaan **eksponenttifunktioksi**.

Yleisemmin eksponenttifunktiot voidaan esittää muodossa $f(x) = a \cdot k^x$. Eksponenttifunktiossa positiivinen kantaluku k korotetaan muuttujan määräämään potenssiin x. Eksponenttina oleva muuttuja voi saada mitä tahansa reaalilukuarvoja. Kerroin a kuvaa suureen lähtöarvoa.

Laskimessa Neperin lukua ei voi kirjoittaa kirjainnäppäimen *e* avulla. Kantaluvulle *e* on olemassa oma toiminto.

Erilaisista eksponenttifunktioista tunnetuin on funktio e^x. Siinä potenssin kantalukuna on **Neperin luku** e. Se on piin kaltainen irrationaaliluku eli päättymätön ja jaksoton desimaaliluku. Neperin luvun likiarvo kolmen desimaalin tarkkuudella on 2,718.

Eksponentiaalinen malli

$f(x) = a \cdot k^x$

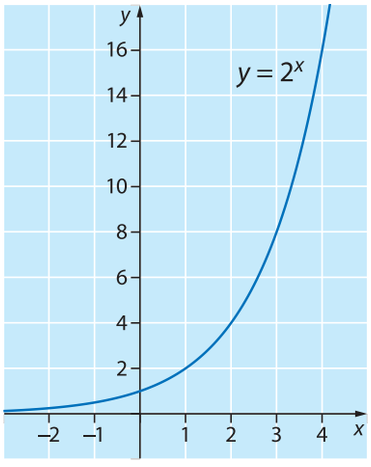
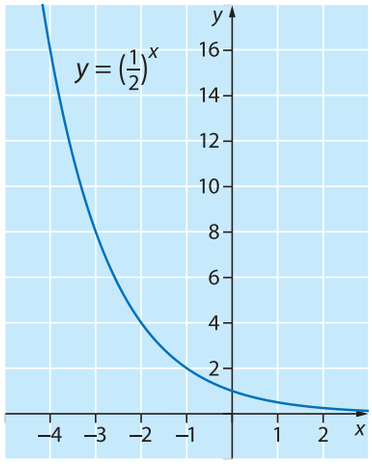
- x on reaaliluku
- vakio $a \neq 0$
- $k > 0$ ja $k \neq 1$

Eksponenttifunktiolla mallinnetaan **eksponentiaalista kasvua** tai **vähenemistä**.

- Jos eksponenttifunktion arvot kasvavat muuttujan arvojen kasvaessa, funktio kuvaa eksponentiaalista kasvua.
- Jos eksponenttifunktion arvot pienenevät muuttujan arvojen kasvaessa, funktio kuvaa eksponentiaalista vähenemistä.

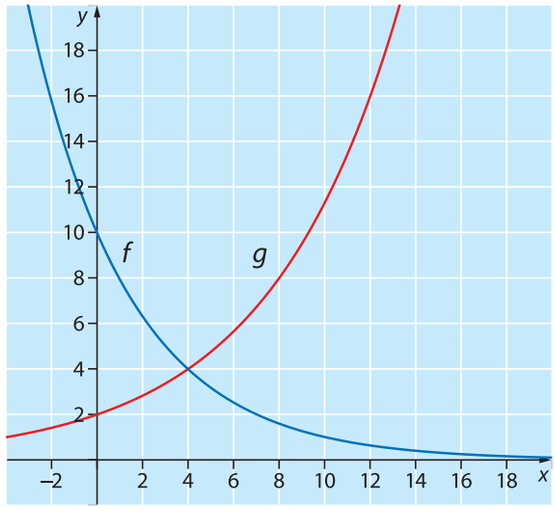
Kasvaminen tai väheneminen riippuu potenssin kantaluvusta k.

Jos $k = 1$, funktio ei ole eksponenttifunktio, vaan lineaarinen funktio, jonka kuvaaja on suora.

Eksponentiaalinen kasvu	Eksponentiaalinen väheneminen
$k > 1$	$0 < k < 1$
	

ESIMERKKI 1

Kuvassa on esitetty eksponenttifunktioiden f ja g kuvaajat.

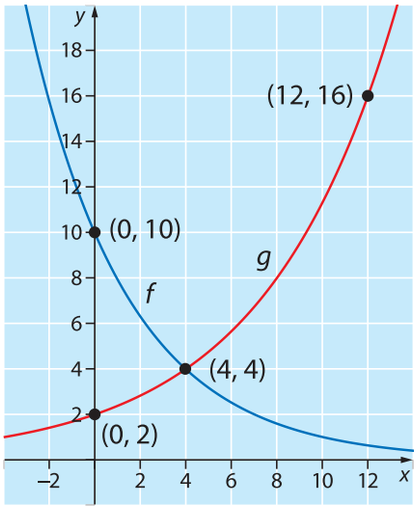


a) Määritä funktioiden kuvaajien avulla funktioiden f ja g arvot kohdissa $x = 0$ ja $x = 4$. Päättele niiden avulla, kumpi funktioista kuvaa eksponentiaalista kasvua ja kumpi vähenemistä.

b) Millä muuttujan x arvolla $g(x) = 16$?

c) Millä muuttujan x arvolla $f(x) = g(x)$?

RATKAISU



a) Funktion g kuvaajasta nähdään, että $g(0) = 2$ ja $g(4) = 4$. Muuttujan arvojen kasvaessa funktion arvot kasvavat eli g kuvaa eksponentiaalista kasvua.

Funktion f kuvaajan mukaan $f(0) = 10$ ja $f(4) = 4$. Funktion arvot pienenevät muuttujan arvojen kasvaessa eli f kuvaa eksponentiaalista vähenemistä.

b) Yhtälön $g(x) = 16$ ratkaisuna on sen pisteen x-koordinaatti, jonka y-koordinaatti on 16. Tämä piste on (12, 16) eli $x = 12$.

c) $f(x) = g(x)$ siinä koordinaatiston pisteessä, jossa funktioiden kuvaajat leikkaavat toisensa eli pisteessä (4, 4). Tällöin $x = 4$.

VASTAUS

a) $g(0) = 2$ ja $g(4) = 4$, $f(0) = 10$ ja $f(4) = 4$, f kuvaa eksponentiaalista vähenemistä ja g eksponentiaalista kasvamista

b) $x = 12$

c) $x = 4$

ESIMERKKI 2

Radon on hajuton, mauton ja väritön radioaktiivinen jalokaasu. Sen isotooppi Rn-222 aiheuttaa terveyshaittoja rakennuksissa, jonne se päätyy maaperästä. Radonin hajoamista voidaan mallintaa eksponenttifunktiolla $f(x) = a \cdot e^{-0{,}18x}$, jossa a on radonin määrä hajoamisen alkaessa ja x on aika vuorokausina. Eräässä tutkimuksessa havaittiin rakennuksen radonmääräksi 2500 becquereliä (Bq).

a) Laske funktion f avulla radonin määrä 100 vuorokauden kuluttua mittauksesta.

b) Mikä oli ollut radonin määrä rakennuksessa 30 vuorokautta ennen mittausta?

c) Piirrä funktion f kuvaaja ja arvioi kuvaajan avulla aika, jonka jälkeen aineesta on jäljellä puolet.

RATKAISU

a) Mittauksen alkaessa radonin määrä oli 2500 Bq eli $a = 2500$. Radonin määrä 100 vuorokauden kuluttua saadaan sijoittamalla $x = 100$ funktioon f.

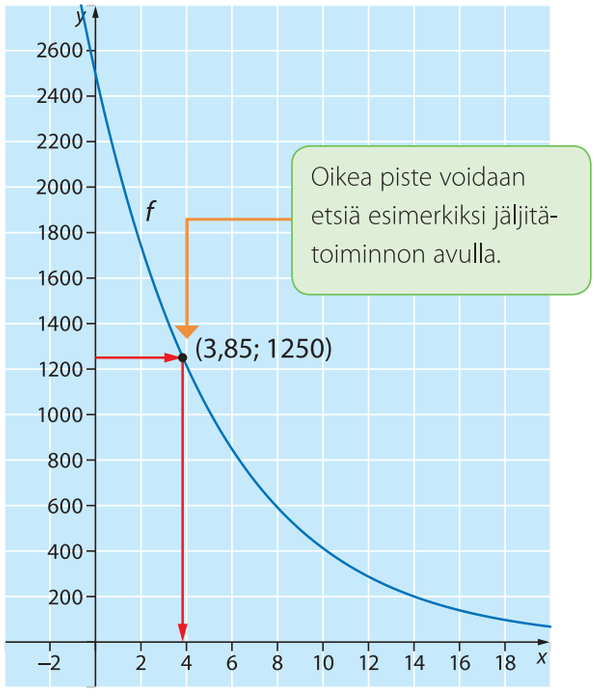
$$f(100) = 2500 \cdot e^{-0{,}18 \cdot 100} = 0{,}00003807\ldots \approx 3{,}8 \cdot 10^{-5}\ \text{(Bq)}$$

b) Hajoamista oli tapahtunut jo 30 vuorokautta ennen mittausta. Radonin määrä saadaan selville sijoittamalla $x = -30$ funktioon f.

$$f(-30) = 2500 \cdot e^{-0{,}18 \cdot (-30)} = 553\,516{,}04\ldots \approx 5{,}5 \cdot 10^{5}\ \text{(Bq)}$$

c) Funktion f arvo eli kuvaajan y-koordinaatti kertoo radonin määrän.

Etsitään kuvaajalta piste, jonka y-koordinaatti on $2500 : 2 = 1250$.



Aineen määrästä on hajonnut puolet 3,9 vuorokauden kuluttua.

VASTAUS **a)** $3{,}8 \cdot 10^{-5}$ Bq **b)** $5{,}5 \cdot 10^{5}$ Bq **c)** 3,9 vuorokautta

ESIMERKKI 3

Valokuvan leveys on 20,0 cm. Kopiokoneella otetaan valokuvasta pienennöksiä siten, että jokaisen pienennöksen leveys on 15 prosenttia edellisen kuvan leveyttä pienempi.

a) Muodosta funktio f, joka mallintaa kopion leveyttä, kun alkuperäistä valokuvaa on pienennetty x kertaa.

b) Laske funktion avulla kopion leveys, kun valokuvaa on pienennetty 8 kertaa.

RATKAISU

a) Kopioitaessa leveys pienenee 15 %, jolloin kopion uusi leveys on $100\ \% - 15\ \% = 85\ \% = 0{,}85$ edellisestä eli leveys 0,85-kertaistuu. Tutkitaan taulukon avulla leveyden muuttumista.

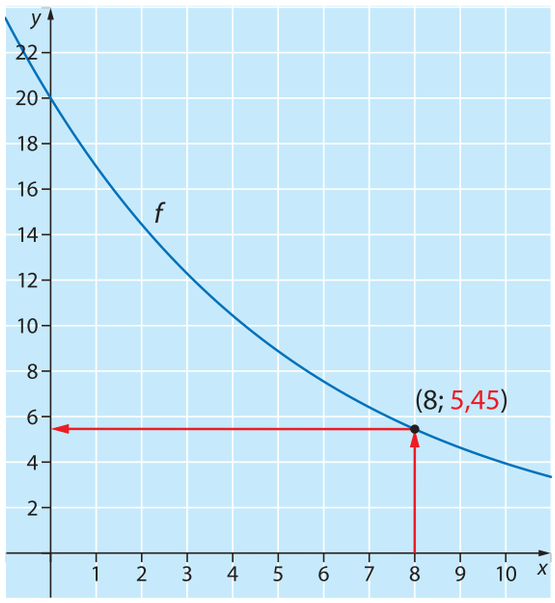
Kuinka mones kopio?	Leveys (cm)
1	$0{,}85 \cdot 20{,}0$
2	$0{,}85^2 \cdot 20{,}0$
3	$0{,}85^3 \cdot 20{,}0$
x	$0{,}85^x \cdot 20{,}0$

Kopion leveyttä voidaan mallintaa funktiolla $f(x) = 0{,}85^x \cdot 20{,}0$.

b) Valokuvan leveys kahdeksannen pienennyksen jälkeen saadaan sijoittamalla $x = 8$ funktioon f.

$$f(8) = 0{,}85^8 \cdot 20{,}0 = 5{,}4498\ \ldots \approx 5{,}45$$

Kuvan leveys on siis 5,45 cm.



VASTAUS

a) $f(x) = 0{,}85^x \cdot 20{,}0$ (cm) **b)** 5,45 cm

ESIMERKKI 4

Maapallon väkiluvun arvioidaan kasvavan vuosittain likimain 1,1 %. Vuonna 2011 väkiluku saavutti 7,0 miljardin ihmisen rajan.

a) Muodosta funktio g, joka kuvaa maapallon väkiluvun kehitystä, kun vuodesta 2011 on kulunut x vuotta.

b) Laske mallin avulla arvio maapallon väkiluvulle vuonna 2030.

c) Laske mallin avulla väkiluku vuonna 1990, jos vuotuisen väestönkasvun oletetaan olleen samansuuruinen myös ennen vuotta 2011.

VASTAUS

a) Vuosittainen kasvu on 1,1 %. Lasketaan kasvua kuvaava prosenttikerroin.

$$100\ \% + 1{,}1\ \% = 101{,}1\ \% = 1{,}011$$

Väkiluku siis 1,011-kertaistuu joka vuosi. Tutkitaan taulukon avulla väkiluvun muutosta.

Vuodet	Väkiluku (mrd)
1	$1{,}011 \cdot 7{,}0$
2	$1{,}011^2 \cdot 7{,}0$
3	$1{,}011^3 \cdot 7{,}0$
x	$1{,}011^x \cdot 7{,}0$

Väkilukua voidaan mallintaa funktiolla $g(x) = 1{,}011^x \cdot 7{,}0$.

b) Vuonna 2030 on kulunut 2030 – 2011 = 19 vuotta. Sijoitetaan siis $x = 19$ funktioon g.

$$g(19) = 1{,}011^{19} \cdot 7{,}0 = 8{,}617\ldots \approx 8{,}6$$

Vuonna 2030 väkiluku on mallin mukaan 8,6 miljardia.

c) Aikaa vuodesta 1990 vuoteen 2011 on kulunut $2011 - 1990 = 21$ vuotta. Negatiivisilla muuttujan arvoilla voidaan laskea väkiluku niille vuosille, jotka olivat ennen vuotta 2011.

Väkiluku vuonna 1990 saadaan, kun sijoitetaan $x = -21$ funktioon g.

$$g(-21) = 1{,}011^{-21} \cdot 7{,}0 = 5{,}563\ldots \approx 5{,}6$$

Todellisuudessa vuonna 1990 maapallon väkiluku oli 5,3 miljardia.

Vuonna 1990 väkiluku oli mallin mukaan 5,6 miljardia.

VASTAUS **a)** $g(x) = 1{,}011^x \cdot 7{,}0$ **b)** 8,6 miljardia **c)** 5,6 miljardia

Laskimen tai muun apuvälineen käyttö

Funktion kuvaajan piirtäminen

Eksponenttifunktion kuvaaja piirretään apuvälineellä samalla tavalla kuin muidenkin funktioiden kuvaajat. Koska funktion arvot voivat kasvaa nopeasti hyvin suuriksi, kuvaajanäkymää joudutaan yleensä säätämään, jotta kuvaajan muoto saadaan näkyviin. On siis osattava valita akselien asteikot sopivalla tavalla.

Jos eksponenttifunktiossa on kantalukuna Neperin luku ***e***, se on yleensä valittava apuvälineestä erikseen (ei siis voi kirjoittaa kantalukua kirjainnäppäimen e avulla.)

Kuvaajan pisteiden tutkiminen

Merkitään kuvaajalle piste. Muutetaan pisteen ***x***- tai ***y***-koordinaattia riippuen siitä, mitä tehtävissä kysytään.

Pisteitä voi myös tutkia jäljitä-toiminnon avulla.

Eksponenttiyhtälön ratkaiseminen

Eri apuvälineet voivat antaa eksponenttiyhtälön ratkaisun erilaisessa muodossa. Jos laskin antaa sovellustehtävässä ratkaisun esimerkiksi luonnollisen logaritmin avulla, on se osattava muuntaa numeeriseen muotoon (likiarvon määrittäminen).

Tehtävät

E1

86. Alla on esitetty funktioiden f ja g kuvaajat.

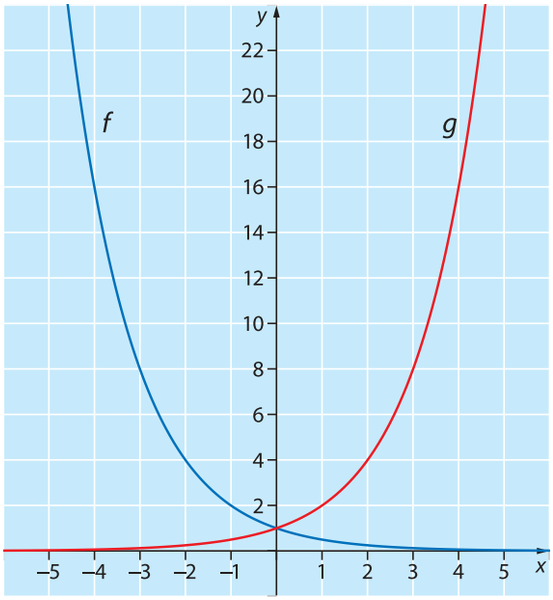
a) Määritä kuvaajien avulla funktion f arvot kohdissa $x = -3$ ja $x = -1$. Määritä funktion g arvot kohdissa $x = 1$ ja $x = 3$.

b) Kumpi funktioista kuvaa eksponentiaalista kasvua? Perustele.

c) Määritä $f(-4)$ ja $g(4)$. Mitä havaitset?

d) Päättele yhtälön $f(x) = 256$ ratkaisu, kun tiedetään, että $g(6) = 256$.

e) Ratkaise yhtälö $f(x) = g(x)$.

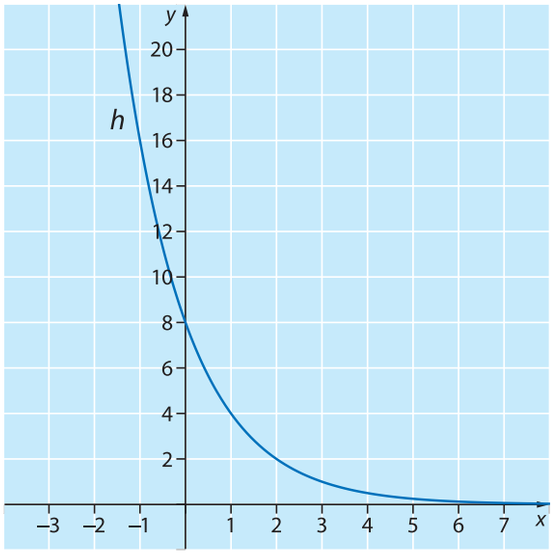


87. Tutki funktion h kuvaajaa ja

a) määritä $h(0)$ ja $h(1)$

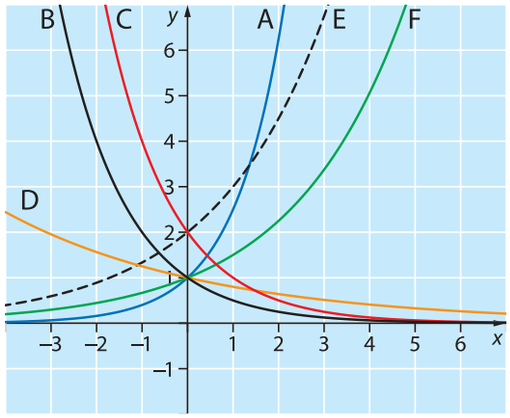
b) ratkaise yhtälö $h(x) = 16$

c) ratkaise epäyhtälö $2 < h(x) < 16$.



88. Yhdistä funktiot oikeisiin kuvaajiin.

- $f(x) = 2{,}5^x$
- $g(x) = 2 \cdot 1{,}5^x$
- $h(x) = 1{,}5^x$
- $k(x) = 0{,}8^x$
- $j(x) = 2 \cdot 0{,}5^x$
- $l(x) = 0{,}5^x$



89. Piirrä funktion $f(x) = 4^x$ kuvaaja. Muuta ensin kuvaaja-näkymässä akselien asteikkoja siten, että saat halutun funktion arvon näkyviin. Päättele kuvaajan avulla

a) $f(3)$

b) yhtälön $f(x) = 4096$ ratkaisu.

90. Tutki funktioita $f(x) = e^x$ ja $g(x) = e^{-x}$ graafisesti.

a) Ratkaise yhtälö $f(x) = g(x)$.

b) Määritä $g(-3)$ ja $f(3)$ kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.

c) Ratkaise yhtälö $f(x) = 12$ kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.

E2

91. Bakteeriviljelmässä olevien bakteerien määrä voidaan laskea funktion $g(x) = 1000 \cdot e^{0{,}04x}$ avulla, kun tarkastelun alusta on kulunut x tuntia.

a) Kuinka monta bakteeria viljelmässä oli tarkastelun aloittamishetkellä?

b) Laske bakteerien määrä vuorokauden kuluttua kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.

c) Piirrä funktion f kuvaaja. Päättele kuvaajan avulla, milloin bakteerien määrä viljelmässä on kaksinkertaistunut.

92. Erään alueen asukasmäärää (miljoonina) voidaan mallintaa funktiolla $P(t) = 2e^{0{,}01t}$, jossa t on aika vuosina nykyhetkestä alkaen.

a) Piirrä funktion kuvaaja välillä [0, 5].

b) Mikä on tämänhetkinen asukasmäärä?

c) Päättele kuvaajan avulla, missä ajassa asukasmäärä kaksinkertaistuu.

d) Mikä oli asukasmäärä 100 vuotta sitten?

93. Lääketieteessä käytetään jodin radioaktiivista isotooppia I-131. Sen hajoamista elimistössä voidaan mallintaa eksponenttifunktiolla $f(x) = a \cdot 0{,}917^x$, jossa a on jodin massa hajoamisen alkaessa ja x aika vuorokausina. Potilaalle annetaan 5,0 mg jodia.

a) Laske funktion f avulla jodin määrä kahden viikon kuluttua.

b) Kuinka monta prosenttia jodista on jäljellä 100 vuorokauden kuluttua?

c) Piirrä funktion f kuvaaja ja arvioi kuvaajasta I-131:n puoliintumisaika eli aika, jossa aineesta on hajonnut puolet.

94. Eräät solut voivat jakautua 80 minuutin välein. Soluviljelmässä on 200 kappaletta näitä soluja. Solujen määrää viljelmässä voidaan mallintaa funktiolla $s(t) = 200 \cdot 1{,}682^t$, jossa t on aika tunteina viljelyn aloittamisesta.

a) Kuinka paljon soluja on viiden tunnin kuluttua kokeen aloittamisesta?

b) Piirrä funktion s kuvaaja. Päättele kuvaajan avulla, missä vaiheessa soluja on miljoona.

Anna vastaukset kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.

E3

95. Tehtaasta pääsee vesistöön myrkyllistä ainetta. Aineen pitoisuus vesistössä heti onnettomuuden jälkeen on 300 mg yhdessä litrassa vettä. Vesistöön virtaa puhdasta vettä ja osa vanhasta vedestä poistuu siten, että viikossa 0,05 % vedestä vaihtuu.

a) Muodosta funktio m, joka kuvaa myrkyllisen aineen määrää vesistössä, kun onnettomuudesta on kulunut x viikkoa.

b) Laske funktion m avulla veden myrkkypitoisuus (mg/l) milligramman tarkkuudella, kun onnettomuudesta on kulunut vuosi.

96. Oletetaan, että terveen puun massa kasvaa joka vuosi keskimäärin 13 %, kun puun ikä on 5–20 vuotta. Erään puun iäksi arvioitiin vuosirenkaiden perusteella 11 vuotta. Tuolloin puun massa oli 1900 kg.

a) Muodosta funktio f, joka kuvaa puun massaa vuosien funktiona, kun tutkimuksen aloittamishetkeksi asetetaan puun massa 11-vuotiaana.

b) Laske puun massa 20-vuotiaana.

c) Mikä oli puun massa 6-vuotiaana?

97. Tarinan mukaan shakkipelin keksijä pyysi palkakseen riisinjyviä siten, että ensimmäiseen ruutuun tuli yksi jyvä, toiseen kaksi ja jokaiseen seuraavaan ruutuun aina kaksinkertainen määrä edelliseen ruutuun verrattuna.

a) Muodosta funktio f, joka kertoo riisinjyvien määrän ruudussa x.

b) Laske funktion avulla riisinjyvien määrä 10. ruudussa.

c) Piirrä funktion f kuvaaja.

d) Päättele kuvaajan avulla, missä ruudussa on 1024 jyvää.

E4

98. Liike arvioi luomutuotteiden myynnin (€) kasvavan joka vuosi 5,0 %. Myynti tänä vuonna oli 250 000 €.

a) Muodosta funktio m, joka kuvaa liikkeen luomutuotteiden myyntiä (€) ajan x (vuosia) funktiona.

b) Määritä funktion m avulla myynti kahdeksan vuoden kuluttua.

c) Määritä myynti kolme vuotta aikaisemmin, kun kasvu oli samansuuruista myös ennen nykyhetkeä.

99. Potilaalle annetaan 800,0 mg lääkeainetta. Aineen pitoisuus elimistössä vähenee joka tunti 8,0 %.

a) Muodosta funktio h, joka kuvaa lääkeaineen määrää elimistössä, kun lääkkeen antamisesta on kulunut x tuntia.

b) Määritä funktion h avulla lääkkeen määrä elimistössä vuorokauden kuluttua lääkkeen antamisesta.

c) Piirrä funktion h kuvaaja ja päättele sen avulla, kuinka kauan kestää, että lääkkeestä on poistunut 95 %.

100. Ilmaston lämpenemisen vuoksi myös valtamerien lämpötilat nousevat. Eräällä merialueella meriveden lämpötila pinnan läheisyydessä mittaushetkellä oli 5,0 °C. Oletetaan, että lämpötila nousee alueella 0,77 % joka vuosi.

a) Muodosta funktio T, joka kuvaa lämpötilaa, kun mittaushetkestä on kulunut x vuotta.

b) Mikä olisi veden lämpötila 100 vuoden kuluttua?

c) Jos lämpötilan muutoksen oletetaan olleen samansuuruista myös ennen mittaushetkeä, mikä oli lämpötila 50 vuotta aikaisemmin?

Sekalaisia

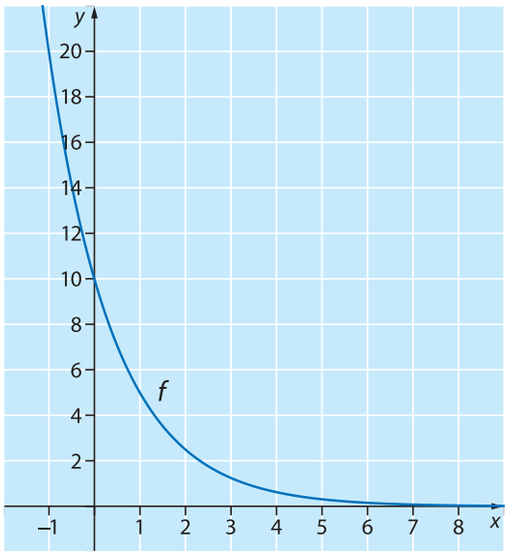
101. Alla on funktion f kuvaaja. Määritä kuvaajan avulla

a) $f(0)$

b) $f(-1)$

c) yhtälön $f(x) = 5$ ratkaisu

d) epäyhtälön $f(x) > 10$ ratkaisu.



102. Suolahappoliuoksen konsentraatio c (mol/l) voidaan määrittää liuoksen pH:n avulla seuraavasti:

$c(x) = 10^{-x}$, jossa x on liuoksen pH.

a) Määritä konsentraatio liuokselle, jonka pH = 2,5.

b) Piirrä funktion c kuvaaja ja määritä sen avulla pH, jos liuoksen konsentraatio on 0,2 mol/l.

103. Yritys lanseeraa uuden tuotteen. Tuotteen myynti aloitetaan hetkellä $t = 0$. Kun tuotetta on myyty t kuukautta, myynnin kokonaismäärää (kpl) voidaan mallintaa funktiolla S:

$S(t) = 15\,000 \cdot (1 - e^{-0{,}25t})$.

a) Kuinka paljon tuotetta myydään ensimmäisen kuuden kuukauden aikana?

b) Piirrä funktion S kuvaaja. Arvioi kuvaajasta, milloin tuotetta on myyty 14 000 kappaletta.

c) Tutki kuvaajaa. Miten myynti näyttäisi tulevaisuudessa kehittyvän?

104. Lokakuussa 2016 pörssiyhtiö Koneen osakekurssi oli 44,87 €. Kurssi oli noussut viimeiset viisi vuotta keskimäärin 19,4 % joka vuosi. Oletetaan, että kurssikehitys jatkuu samanlaisena.

a) Muodosta funktio k, joka kuvaa osakkeen kurssia, kun vuodesta 2016 on kulunut x vuotta.

b) Mikä olisi osakkeen kurssi neljän vuoden kuluttua?

c) Mikä oli osakkeen kurssi viisi vuotta sitten?

105. Suomen seitsemän suurimman eläkeyhtiön nettovarallisuus vuonna 2016 oli 165 miljardia euroa. Vaikka eläkeyhtiöt sijoittavat varojaan, pelätään, että tulevaisuudessa eläkeyhtiöt joutuvat käyttämään pääomaansa liian paljon. Oletetaan, että kaikkien mainittujen eläkeyhtiöiden pääoma pienenisi joka vuosi 2,5 % sijoitustuotoista huolimatta.

a) Muodosta funktio p, joka kuvaa yhtiöiden nettovarallisuutta, kun aikaa vuodesta 2016 on kulunut x vuotta.

b) Kuinka paljon nettovarallisuutta eläkeyhtiöillä olisi 20 vuoden kuluttua?

c) Piirrä funktion p kuvaaja välillä [0, 200] ja päättele sen avulla, kuinka monen vuoden kuluttua omaisuus olisi kutistunut 50 miljardiin.

2.2 Eksponenttiyhtälön ratkaiseminen

Pohdinta 1

a) Päättele yhtälöiden ratkaisut käyttäen hyväksi samankantaisia potensseja.

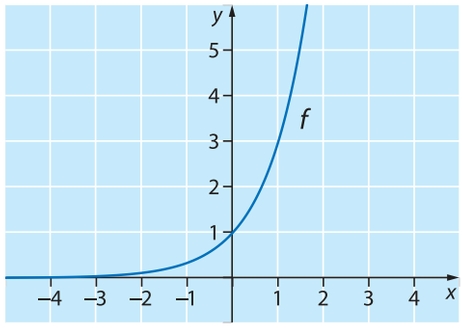
$3^x = 3^8$

$3^x = 27$

$3^{4x} = 3^{20}$

$3^{x+3} = 81$

b) Alla on funktion $f(x) = 3^x$ kuvaaja. Päättele kuvaajan avulla yhtälön $3^x = 1$ ratkaisu.



c) Arvioi kuvaajan avulla yhtälön $3^x = 5$ ratkaisu.

d) Ratkaise laskimen yhtälönratkaisu-toiminnon avulla $3^x = 5$. Esitä sekä laskimen antama tarkka arvo että likiarvo yhden desimaalin tarkkuudella.

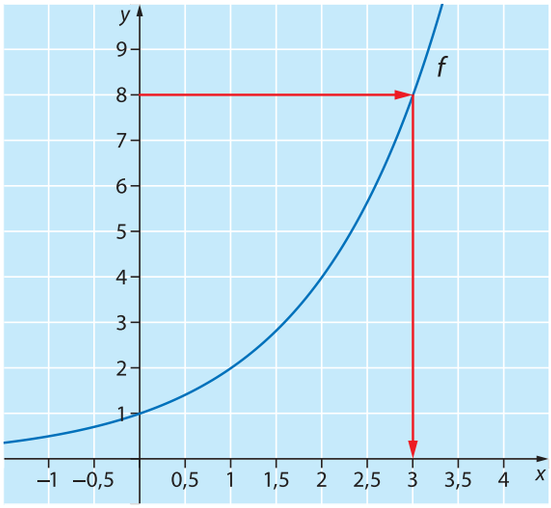
Eksponenttiyhtälössä ratkaistava tuntematon on potenssimerkinnän eksponentissa. Tällainen yhtälö on esimerkiksi $2^x = 8$.

Eksponenttiyhtälö

Yhtälöä $a^x = b$ sanotaan eksponenttiyhtälöksi. Yhtälöllä on ratkaisu, jos

- vakiot a ja b ovat positiivisia reaalilukuja
- eksponentti x on reaaliluku.

Yhtälön $2^x = 8$ ratkaisu voidaan päätellä tutkimalla funktion $f(x) = 2^x$ kuvaajaa.



Funktio f saa vain positiivisia arvoja. Tällöin esimerkiksi yhtälöllä $2^x = -4$ ei ole ratkaisua.

Kuvaajasta nähdään, että lauseke 2^x saa arvon 8, kun muuttujan arvo on 3. Luku 8 voidaan esittää kantaluvun 2 potenssina muodossa 2^3, joten yhtälön ratkaisu voidaan päätellä myös ilman kuvaajaa:

$$2^x = 8$$
$$2^x = 2^3$$
$$x = 3$$

Koska molemmilla puolilla yhtälöä on sama kantaluku, oikea ja vasen puoli ovat yhtä suuret vain, jos eksponentit ovat yhtä suuret.

Jos eksponenttiyhtälö voidaan muokata potenssien laskusääntöjen avulla sellaiseen muotoon, että molemmille puolille saadaan samankantainen potenssi, yhtälö voidaan ratkaista vertailemalla eksponentteja.

ESIMERKKI 1

Ratkaise eksponenttiyhtälö.

a) $3^x = 81$

b) $2^{x-1} = 8^{3x+1}$

c) $7^{2x+1} - 1 = 0$

d) $10^{4x} = \dfrac{1}{100^{x+1}}$

RATKAISU

a) $3^x = 81$

$3^x = 3^4$

$x = 4$

b) $2^{x-1} = 8^{3x+1}$

$2^{x-1} = (2^3)^{3x+1}$ ← $(a^n)^m = a^{nm}$

$2^{x-1} = 2^{9x+3}$

$x - 1 = 9x + 3$

$-8x = 4 \quad | : (-8)$

$x = -\dfrac{4}{8} = -\dfrac{1}{2}$

c) $7^{2x+1} - 1 = 0$

$7^{2x+1} = 1$ ← $a^0 = 1$

$7^{2x+1} = 7^0$

$2x + 1 = 0$

$2x = -1 \quad | : 2$

$x = -\dfrac{1}{2}$

d) $10^{4x} = \dfrac{1}{100^{x+1}}$

$10^{4x} = \dfrac{1}{(10^2)^{x+1}}$ ← $\dfrac{1}{a^n} = a^{-n}$

$10^{4x} = (10^{2x+2})^{-1}$

$10^{4x} = 10^{-2x-2}$

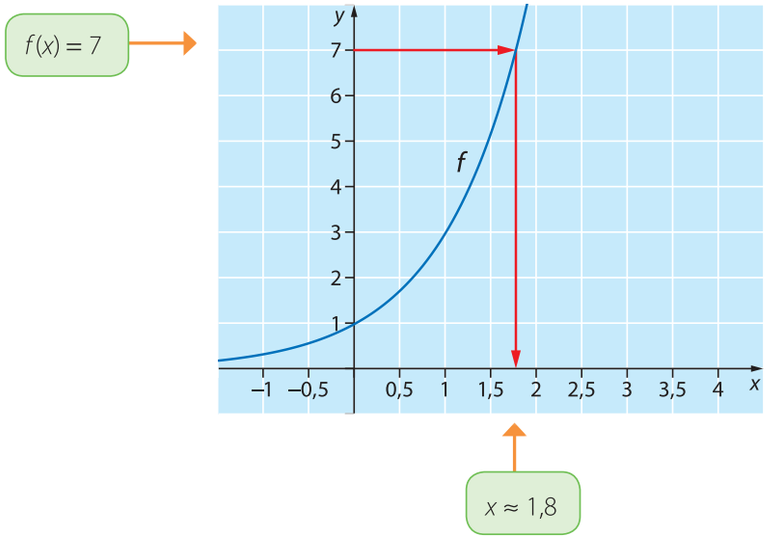
$4x = -2x - 2$

$6x = -2 \quad | : 6$

$x = -\dfrac{2}{6} = -\dfrac{1}{3}$

VASTAUS **a)** $x = 4$ **b)** $x = -\dfrac{1}{2}$ **c)** $x = -\dfrac{1}{2}$ **d)** $x = -\dfrac{1}{3}$

Kaikissa eksponenttiyhtälöissä $a^x = b$ yhtälön eri puolia ei voida kirjoittaa samankantaisina potensseina. Esimerkki tällaisesta yhtälöstä on $3^x = 7$. Tällä yhtälöllä on kuitenkin ratkaisuna reaaliluku. Sen likiarvo saadaan selville tutkimalla funktion $f(x) = 3^x$ kuvaajaa.



Logaritmin käsitteeseen tutustuttiin jo kurssilla MAY1 (Luvut ja lukujonot).

Funktion f kuvaajasta nähdään, että $3^x = 7$, kun $x \approx 1{,}8$. Ratkaisun tarkka arvo esitetään **logaritmin** avulla.

$$3^x = 7$$
$$x = \log_3 7 \approx 1{,}8$$

Ratkaisu on **3-kantainen logaritmi luvusta 7.**

Yleinen logaritmi

Yhtälön $a^x = b$ ratkaisu on a-kantainen logaritmi luvusta b.

$$x = \log_a b$$

- $a > 0$ ja $a \neq 1$
- $b > 0$

Lisämateriaali: Briggsin logaritmi s. 155

Edellisessä luvussa esiteltiin eksponenttifunktio, jossa kantalukuna on Neperin luku e. Myös eksponenttiyhtälössä $e^x = b$ on kantalukuna e. Yhtälön ratkaisuna on e-kantainen logaritmi luvusta b. Kun logaritmin kantalukuna on e, siitä käytetään nimitystä **luonnollinen logaritmi** ja se lyhennetään merkinnällä **ln**.

$$e^x = b$$
$$x = \log_e b = \ln b$$

Kantalukua e ei kirjoiteta näkyviin lausekkeeseen.

Luonnollinen logaritmi ln

Yhtälön $e^x = b$, $b > 0$, ratkaisu on luonnollinen logaritmi luvusta b.

$$x = \ln b$$

Useimmat laskinohjelmat ilmoittavat eksponenttiyhtälön ratkaisun luonnollisen logaritmin avulla, vaikka yhtälön kantaluku ei olisikaan Neperin luku e. Ratkaisun esittäminen Neperin luvun avulla perustuu potenssien ja logaritmien laskusääntöihin. Logaritmien laskusääntöjä ei lyhyen matematiikan oppimäärässä käsitellä.

Eksponenttiyhtälö	Yhtälön ratkaisu laskimella
$e^x = 12$	$x = \ln 12 \approx 2{,}48$
$5^x = 8$	$x = \frac{\ln 8}{\ln 5} \approx 1{,}29$
$6^{2x} = 2$	$x = \frac{\left(\frac{\ln 2}{\ln 6}\right)}{2} \approx 0{,}19$

ESIMERKKI 2

Ratkaise eksponenttiyhtälö logaritmia käyttäen.

a) $4^x = 5$ **b)** $2 \cdot 8^x = 20$

c) $3e^x = 21$ **d)** $3e^{2x} = 9$

RATKAISU

a) $4^x = 5$

$x = \log_4 5$

Yhtälön $a^x = b$ ratkaisuna on $x = \log_a b$.

b) Kirjoitetaan yhtälö ensi muodossa $a^x = b$.

$2 \cdot 8^x = 20 \quad | : 2$

$8^x = 10$

$x = \log_8 10$

c) $3e^x = 21 \quad | : 3$

$e^x = 7$

$x = \ln 7$

Yhtälön $e^x = b$ ratkaisuna on $x = \ln b$.

d) $3e^{2x} = 9 \quad | : 3$

$e^{2x} = 3$

$2x = \ln 3 \quad | : 2$

$x = \frac{\ln 3}{2}$

Yhtälön molemmat puolet on jaettava vielä luvulla 2.

VASTAUS

a) $x = \log_4 5$ **b)** $x = \log_8 10$

c) $x = \ln 7$ **d)** $x = \frac{\ln 3}{2}$

ESIMERKKI 3

Kalastuskunta istuttaa järveen taimenia. Taimenten määrää järvessä kuvaa lauseke $10\,000 \cdot 1{,}042^x$, jossa x on aika vuosina istutushetkestä laskettuna.

a) Kuinka monta vuotta kestää ennen kuin kalojen määrä on kasvanut 13 300 kalaan?

b) Missä ajassa kalakanta kaksinkertaistuu?
Anna vastaukset vuoden tarkkuudella.

RATKAISU

a) Muodostetaan kalojen määrän 13 300 avulla yhtälö ja ratkaistaan se.

$$10\,000 \cdot 1{,}042^x = 13\,300$$
$$x = 6{,}931...$$
$$x \approx 7$$

Kalojen määrä on 13 300 seitsemän vuoden kuluttua.

b) Kun kalakanta on kaksinkertaistunut, järvessä on $2 \cdot 13\,300 = 26\,600$ kalaa. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä x.

$$10\,000 \cdot 1{,}042^x = 26\,600$$
$$x = 23{,}7794...$$
$$x \approx 24$$

Kalojen määrä kaksinkertaistuu 24 vuodessa.

VASTAUS **a)** 7 vuotta **b)** 24 vuodessa

ESIMERKKI 4

Kupissa on juuri valmistettua, kuumaa kahvia. Kahvin lämpötilaa (°C) ajan funktiona esittää

$$f(x) = 20 + 75e^{-0{,}0354x},$$

jossa x (min) on aika, joka on kulunut tarkastelun aloittamisesta eli hetkestä, jolloin kahvi kaadettiin kuppiin.

a) Mikä oli kahvin lämpötila kuppiin kaadettaessa?

b) Kuinka kauan kestää, että kahvi on jäähtynyt lämpötilaan 70,0 °C?

c) Henkilön ruumiinlämpö on 36,6 °C. Kuinka kauan kahvin jäähtyminen tähän lämpötilaan kestää?

RATKAISU

a) Kun kahvi kaadetaan kuppiin, $x = 0$. Sijoitetaan tämä funktioon f.

$$f(0) = 20 + 75e^{-0{,}0354 \cdot 0} = 95$$

Kahvin lämpötila kuppiin kaadettaessa on 95 °C.

b) Kun lämpötila on 70 °C, funktio saa arvon 70. Ratkaistaan yhtälö $f(x) = 70{,}0$.

$$\begin{aligned} 20 + 75e^{-0{,}0354x} &= 70{,}0 \\ x &= 11{,}453... \\ x &\approx 11{,}5 \end{aligned}$$

Aikaa on kulunut 11,5 min.

c) Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälö $f(x) = 36{,}6$.

$$\begin{aligned} 20 + 75e^{-0{,}0354x} &= 36{,}6 \\ x &= 42{,}60... \\ x &\approx 42{,}6 \end{aligned}$$

Kahvi on ruumiinlämpöistä 42,6 min kuluttua.

VASTAUS **a)** 95 °C **b)** 11,5 min **c)** 42,6 min

Tehtävät

106. Ratkaise yhtälö ilman logaritmia.

a) $5^x = 5^{-x+2}$ b) $9^{2x} = 3$ c) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 9$

E1 **107.** Ratkaise yhtälö ilman logaritmia.

a) $2^x = 32$ b) $3^{2x-1} = 9$

c) $6^{5x-10} = 1$ d) $4^x = \frac{1}{16}$

108. Ratkaise yhtälö ilman logaritmia.

a) $4^x = 2^{1-x}$ b) $\left(\frac{1}{5}\right)^{4x} = 25^2$

109. Ratkaise yhtälö ilman logaritmia.

a) $4^{6x-3} = 8^{4-x}$ b) $\frac{81^{x+1}}{27^{5x}} = 3$

E2 **110.** Ratkaise yhtälö logaritmia käyttäen.

a) $3^x = 7$ b) $4 \cdot 2^x = 24$

c) $2 \cdot e^x = 6$ d) $4 \cdot e^{x-1} = 8$

111. Ratkaise yhtälö logaritmia käyttäen.

a) $2^{5x} - 11 = 2$ b) $e^{2x-1} - 2 = 0$

112. Anna esimerkki eksponenttiyhtälöstä, jonka ratkaisu on

a) $x = \log_5 14$ b) $x = \ln 5$ c) $x = \frac{\ln 3}{4}$

---

113. Piirrä funktion $f(x) = 1{,}8^x$ kuvaaja ja ratkaise kuvaajan avulla yhden desimaalin tarkkuudella yhtälö

a) $1{,}8^x = 6$ b) $1{,}8^x = 2{,}5$.

Tarkista tuloksesi ratkaisemalla yhtälö yhtälön ratkaisutoiminnolla.

E3 **114.** Jos yritys sijoittaa mainontaan x euroa, myynnin määrä euroina on $40\,000 \cdot 1{,}00005^x$.

a) Mikä on myynti, jos yritys ei mainosta lainkaan?

b) Millä summalla pitäisi mainostaa, jotta myynti olisi 50 000 €?

Anna vastaus satojen eurojen tarkkuudella.

115. Toriumin hyödyntämistä ydinvoimaloissa uraanin sijasta on tutkittu jonkin verran. Ydinvoimalassa tehdyssä kokeessa käytettiin toriumin isotooppia Th-227. Koska tämä isotooppi hajoaa suhteellisen nopeasti, sitä ei voi varastoida pitkäksi ajaksi. Ydinvoimalan varastoon hankittiin 2500 g isotooppia. Lauseke $2500 \cdot 0{,}964^x$ kuvaa toriumin määrää, kun hankinnasta on kulunut x vuorokautta.

a) Minkä ajan kuluttua toriumin määrä on 1500 g?

b) Missä ajassa toriumista on hajonnut puolet?

E4

116. Metsäalueelle istutettiin metsäkauriita. Kaurispopulaation kokoa voidaan mallintaa funktiolla $f(x) = 300 \cdot (1 - e^{-0{,}3x})$, jossa $x \geq 2$ on aika vuosina istutushetkestä alkaen.

a) Kuinka monen vuoden kuluttua kauriita on 200?

b) Kuinka monen vuoden kuluttua kauriita on 280?

Anna vastaukset vuoden tarkkuudella.

117. Erään kokeen tulosta voidaan mallintaa funktion $k(x) = 4 \cdot e^{0{,}0306x}$ avulla, jossa x on kokeesta saatu pistemäärä ja $0 \leq x \leq 30$. Kokeesta voi saada vain kokonaisia pisteitä.

a) Millä pistemäärällä saa arvosanan 5?

b) Millä pistemäärällä saa arvosanan 9?

118. Isovanhemmat tallettavat lapsen syntymävuonna korkeakorkoiselle tilille 10 000 € lapsen opintoja varten. Pankin maksama vuosikorko 2,0 % liitetään pääomaan vuosittain.

a) Muodosta funktio f, joka kuvaa kasvanutta pääomaa tilillä, kun sijoitusaika on x vuotta.

b) Kuinka pitkä on sijoitusajan oltava, jotta summa on kasvanut 13 000 euroon?

119. Yritys on asettanut tavoitteeksi säästää 5,0 % henkilöstö- ja materiaalikuluista joka vuosi. Säästöpäätöksen tekohetkellä yrityksen kulut olivat 1,8 miljoonaa euroa.

a) Muodosta funktio f, joka kuvaa kulujen määrää, kun säästökampanja on jatkunut x vuotta.

b) Kuinka monen vuoden kuluttua kulut on pudotettu yhteen miljoonaan? Anna vastaus vuoden tarkkuudella.

120. Vuonna 2016 syntyi 55 040 lasta. Oletetaan, että syntyvyys laskee 2,8 % vuosittain.

a) Muodosta lauseke, joka kuvaa syntyneiden lasten määrää, kun lähtötilanteeksi asetetaan vuoden 2016 syntyneiden määrä.

b) Kuinka monen vuoden kuluttua lapsia syntyy 50 000?

c) Minä vuonna lapsia syntyi laatimasi mallin mukaan 63 000?

121. Radioaktiivinen hajoamislaki voidaan esittää muodossa $N(t) = N_0 \cdot e^{-at}$, jossa N on aineen määrä ajanhetkellä t, N_0 aineen määrä alussa ja a on hajoamisvakio, joka riippuu aineesta. Uraanin isotoopille U-232 hajoamislaki on $N(t) = N_0 \cdot e^{-0{,}0099t}$, jossa t on aika vuosina. Uraanin määrä alussa oli 4500 g. Määritä vuoden tarkkuudella

a) aika, jossa uraanista on hajonnut 90 %

b) uraanin puoliintumisaika eli se aika, josta uraanista on hajonnut puolet?

Sekalaisia

122. Ratkaise yhtälö ilman logaritmia.

a) $3^{3x-4} = 1$ **b)** $2^{5-2x} = 8^{x+1}$ **c)** $49^{2x-4} = \frac{1}{7}$

123. Ratkaise yhtälö logaritmin avulla.

a) $2 \cdot 5^x = 8$ **b)** $\frac{4^x}{3} = 11$ **c)** $5 \cdot e^x - 12 = 3$

124. Vuosien 1992–2008 välisenä aikana platinan hintaa ($) unssilta voidaan kuvata funktiolla $f(x) = 180 \cdot e^{0{,}14x}$, kun vuodesta 1992 on kulunut aikaa x vuotta.

a) Minä vuonna hinta oli 363 $?

b) Minä vuonna hinta oli 1400 $?

125. Niilo ostaa uudenveroisen auton, jonka hinta on 18 500 €. Auton hintaa kuvaa funktio $h(x) = 0{,}92^x \cdot 18\,500$, kun ostohetkestä on kulunut x vuotta.

a) Kuinka monen vuoden kuluttua auton hinta on 12 200 €?

b) Malli toimii siihen vuoteen saakka, kun auton hinta on 8000 €. Kuinka monta vuotta Niilo on tällöin auton omistanut?

Anna vastaukset kokonaisien vuosien tarkkuudella.

126. Kasvatusalustalla olevan hiivan massa kokeen alkaessa oli 0,58 g. Hiivan massa kasvoi joka tunti 0,80 %.

a) Muodosta funktio, joka kuvaa alustalla olevan hiivan massaa (g), kun kokeen aloittamisesta on kulunut t tuntia.

b) Monenko tunnin jälkeen hiivan massa on kaksinkertaistunut?

2.3 Potenssiyhtälö

Pohdinta

a) Herra Markkanen haluaa sijoittaa 50 000 euron summan vähäriskiseen kohteeseen kuuden vuoden ajaksi. Pankki suosittelee sijoittamaan valtioiden obligaatiolainaan. Sijoituksen tuotto riippuu kohdemaasta. Hänelle esitellään viisi vaihtoehtoa. Näissä vaihtoehdoissa sijoituksen arvo kuuden vuoden kuluttua olisi

- A: $1{,}025^6 \cdot 50\,000$ €
- B: $1{,}018^6 \cdot 50\,000$ €
- C: $1{,}005^6 \cdot 50\,000$ €
- D: $1{,}032^6 \cdot 50\,000$ €
- E: $1{,}011^6 \cdot 50\,000$ €

Päättele sijoitusten vuotuinen tuottoprosentti. Mikä sijoituksista on tuottoprosentin perusteella vähäriskisin?

b) Saksan valtionlainojen korot olivat vuonna 2016 erittäin pienet. Kesäkuussa 10 vuoden lainojen korko oli historiallisen alhainen. Jos Herra Markkanen olisi tällöin sijoittanut 50 000 € kymmenen vuoden lainapaperiin, sijoituksen arvo vuoden kuluttua olisi ollut $0{,}996 \cdot 50\,000$ €. Mikä oli korkoprosentti?

c) Sijoitusten huonoon tuottoon pettynyt Markkanen päätti turvautua riskisempään vaihtoehtoon F. Tässä vaihtoehdossa sijoituksen arvo kuuden vuoden kuluttua olisi 65 113 €. Kuinka suuren vuosituoton tämä sijoitus lupaisi? Muodosta sopiva yhtälö ja ratkaise se laskimen yhtälönratkaisutoiminnon avulla.

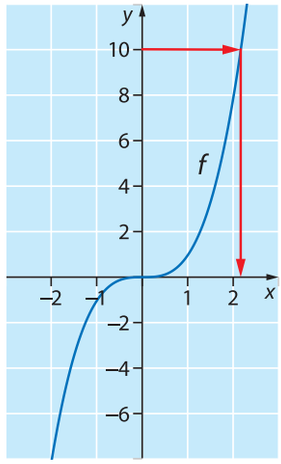
d) Jos Markkanen olisi sijoittanut rahansa Suomen valtion kymmenen vuoden lainaan, sijoituksen arvo 10 vuoden kuluttua olisi ollut 50 502 €. Muodosta sopiva yhtälö ja ratkaise sen avulla 10 vuoden lainan vuosikorko.

Toisen asteen yhtälöitä $x^2 = a$ $(a \geq 0)$ on ratkaistu jo kurssissa MAB2, Lausekkeet ja yhtälöt. Yhtälö voidaan ratkaista neliöjuuren avulla:

$$x = \pm\sqrt{a}$$

Yhtälö $x^2 = a$ on esimerkki **potenssiyhtälöstä**. Potenssiyhtälössä kantaluku on tuntematon. Myös $x^3 = a$ on potenssiyhtälö. Tarkastellaan esimerkkinä potenssiyhtälöä $x^3 = 10$. Sen likimääräinen ratkaisu saadaan tutkimalla funktion $f(x) = x^3$ kuvaajaa.

Kuvaajasta nähdään, että yhtälöllä $x^3 = 10$ on yksi ratkaisu. Yhden desimaalin tarkkuudella se on $x \approx 2{,}2$.



Yhtälön tarkka ratkaisu voidaan esittää **kolmannen juuren** eli **kuutiojuuren** avulla:

$$x = \sqrt[3]{10}$$

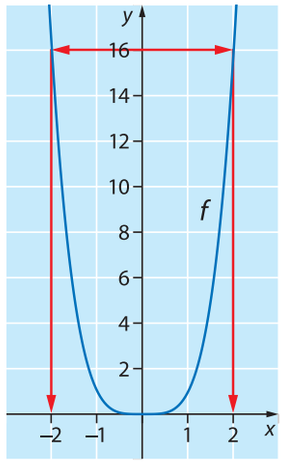
Laskinohjelmistoissa on toiminto neliöjuurelle. Muut juuret lasketaan yleisen juuren toiminnon avulla.

Kuvaajasta nähdään, että funktio f saa sekä positiivisia että negatiivisia arvoja. Tällöin esimerkiksi yhtälöllä $x^3 = -8$ on ratkaisu, $x = \sqrt[3]{-8} = -2$.

Yhtälö $x^4 = 16$ voidaan ratkaista vastaavalla tavalla tutkimalla funktion $f(x) = x^4$ kuvaajaa.

Kuvaajasta nähdään, että on kaksi lukua, jotka toteuttavat yhtälön $x^4 = 16$:

$$x = 2 \text{ ja } x = -2$$



Ilman kuvaajaa yhtälö voitaisiin ratkaista neljännen juuren avulla:

$$x = \pm\sqrt[4]{16} = \pm 2$$

Yhtälön ratkaisussa juurrettava ei voi olla negatiivinen luku, jos eksponentti on parillinen.

Kuvaajasta nähdään, että funktio f saa vain positiivisia arvoja tai arvon nolla. Niinpä esimerkiksi yhtälöllä $x^4 = -16$ ei ole yhtään ratkaisua.

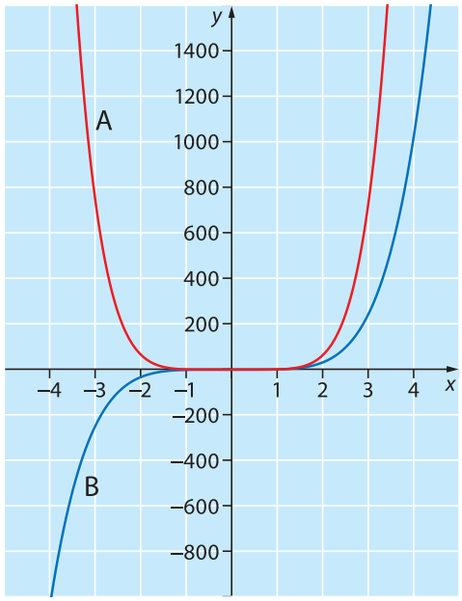
ESIMERKKI 1

Alla on esitetty funktioiden $f(x) = x^5$ ja $g(x) = x^6$ kuvaajat.

a) Yhdistä funktiot oikeisiin kuvaajiin A ja B.

b) Ratkaise kuvaajan avulla yhtälö $f(x) = 1000$.

c) Ratkaise kuvaajan avulla yhtälö $g(x) = 800$.



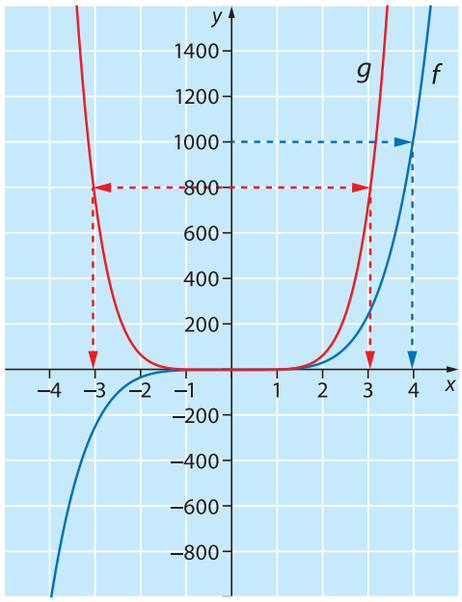
RATKAISU

a) Kuvasta nähdään, että toisen funktion kuvaaja A kulkee aina x-akselilla tai sen yläpuolella. Tällainen funktio saa vain positiivisia arvoja tai arvon nolla.

Koska funktion $g(x) = x^6$ eksponenttina on parillinen luku, se saa aina vähintään arvon nolla (mikä tahansa luku korotettuna parilliseen potenssiin on aina vähintään nolla). Niinpä A on funktion g kuvaaja ja B funktion f kuvaaja.

b) Kuvaajan avulla on etsittävä sellainen muuttujan arvo x, että funktio f saa arvon 1000.

$$f(x) = 1000$$
$$x^5 = 1000$$
$$x \approx 4$$



c) Funktion g kuvaaja on symmetrinen y-akselin suhteen. Funktio saa näin ollen arvon 800 kahdessa eri kohdassa.

$$g(x) = 800$$
$$x^6 = 800$$
$$x \approx 3 \quad \text{tai} \quad x \approx -3$$

VASTAUS

a) f:n kuvaaja on B, g:n kuvaaja on A. **b)** $x \approx 4$ **c)** $x \approx 3$ tai $x \approx -3$

Lisämateriaali: Murtopotenssi s. 152

Kaikki potenssiyhtälöt, joiden eksponentti on positiivinen kokonaisluku, voidaan ratkaista juuren avulla. Juurilla ja potensseilla on yhteys toisiinsa.

- $\sqrt{25} = 5$, koska $5^2 = 25$
- $\sqrt[3]{8} = 2$, koska $2^3 = 8$
- $\sqrt[5]{-243} = -3$, koska $(-3)^5 = -243$

Minkään reaaliluvun parillinen potenssi ei voi olla negatiivinen luku.

Parittoman juuren voi laskea mistä tahansa reaaliluvusta. Parillisen juuren voi laskea vain ei-negatiivisesta reaaliluvusta. Niinpä esimerkiksi juuria $\sqrt{-36}$ ja $\sqrt[4]{-16}$ ei ole määritelty.

Yleinen juuri

$\sqrt[n]{a} = b$, jos $b^n = a$

- jos n on parillinen, $a \geq 0$ ja $b \geq 0$.
- jos n on pariton, niin a ja b voivat olla reaalilukuja.

Potenssiyhtälö $x^n = a$ ratkaistaan ottamalla yhtälön molemmilta puolilta sopiva juuri. Yhtälön ratkaisujen lukumäärä riippuu eksponentista.

Huomaa, että potenssiyhtälöllä $x^n = 0$ on vain yksi ratkaisu $x = 0$ sekä parittomilla että parillisilla eksponentin n arvoilla.

- Potenssiyhtälöllä on **yksi ratkaisu**, jos eksponentti on **pariton** luku.
- Potenssiyhtälöllä on **kaksi** ratkaisua, jos eksponentti on **parillinen** luku ja $a > 0$.
- Potenssiyhtälöllä on **yksi** ratkaisua, jos eksponentti on **parillinen** luku ja $a = 0$.
- Potenssiyhtälöllä **ei ole ratkaisua**, jos eksponentti on **parillinen** luku ja $a < 0$.

Potenssiyhtälön ratkaiseminen

Yhtälön $x^n = a$ ratkaisu on

- $x = \sqrt[n]{a}$, jos n on pariton kokonaisluku ja a on reaaliluku
- $x = \pm\sqrt[n]{a}$, jos n on parillinen kokonaisluku ja $a \geq 0$.

ESIMERKKI 2

Ratkaise yhtälö.

a) $x^3 = -27$ **b)** $3x^4 - 48 = 0$

c) $x^5 = 71$ **d)** $2x^8 - 22 = 0$

RATKAISU

a) Ratkaistaan kolmannen asteen potenssiyhtälö kuutiojuuren avulla. Koska eksponentti on pariton luku, yhtälöllä on vain yksi ratkaisu.

$$x^3 = -27$$

$$x = \sqrt[3]{-27}$$ ← $(-3)^3 = -27$

$$x = -3$$

b) Muokataan ensin yhtälö muotoon, jossa sen molemmilta puolilta voidaan ottaa neljäs juuri.

$$3x^4 - 48 = 0$$

$$3x^4 = 48 \quad | : 3$$

$$x^4 = 16$$

$$x = \pm\sqrt[4]{16}$$ ← Koska eksponentti on parillinen luku, yhtälöllä on kaksi ratkaisua. $2^4 = 16$, $(-2)^4 = 16$

$$x = \pm 2$$

c) Ratkaistaan yhtälö viidennen juuren avulla.

$$x^5 = 71$$

$$x = \sqrt[5]{71}$$ ← Minkään kokonaisluvun viides potenssi ei ole 71, joten ratkaisun tarkka arvo on annettava juuren avulla.

d) Muokataan yhtälöä sopivaan muotoon ja ratkaistaan se kahdeksannen juuren avulla.

$$2x^8 - 22 = 0$$

$$2x^8 = 22 \quad | : 2$$

$$x^8 = 11$$

$$x = \pm\sqrt[8]{11}$$

VASTAUS **a)** $x = -3$ **b)** $x = \pm 2$ **c)** $x = \sqrt[5]{71}$ **d)** $x = \pm\sqrt[8]{11}$

ESIMERKKI 3

Stefanin–Boltzmannin laki on fysikaalinen laki, jonka mukaan mustan kappaleen säteilemä teho pinta-alaa kohti on suoraan verrannollinen lämpötilan neljänteen potenssiin. Mustan kappaleen, jonka pinta-ala on 1,0 cm^2, säteilyä (watteina) voidaan mallintaa funktion $f(x) = 5{,}7 \cdot 10^{-12}x^4$ avulla, jossa x on lämpötila kelvineinä.

a) Millä teholla kappale säteilee 1500 K:n lämpötilassa?

b) Kuinka suuri on lämpötilan oltava, jotta kappale säteilisi 15 watin teholla?

RATKAISU

a) Teho 1500 kelvinin lämpötilassa lasketaan sijoittamalla $x = 1500$ funktion f lausekkeeseen.

$$f(1500) = 5{,}7 \cdot 10^{-12} \cdot 1500^4 = 28{,}856\ldots \approx 29$$

Teho on 29 wattia.

b) Lämpötila saadaan tehon avulla ratkaisemalla yhtälö $f(x) = 15$.

$$\begin{aligned} f(x) &= 15 \\ 5{,}7 \cdot 10^{-12}x^4 &= 15 \\ x &= \pm 1273{,}66\ldots \\ x &\approx \pm 1300 \end{aligned}$$

Kelvinasteikko alkaa arvosta 0 K, joka on absoluuttinen nollapiste –273,15 °C.

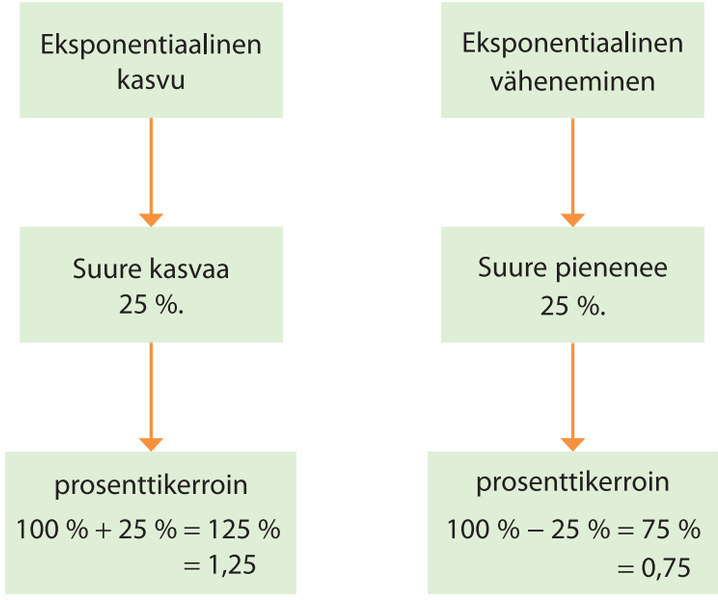
Koska lämpötila kelvineinä ei voi olla negatiivinen luku, ratkaisuksi kelpaa vain $x \approx 1300$. Lämpötila on siis 1300 kelviniä.

VASTAUS

a) 29 wattia **b)** 1300 kelviniä

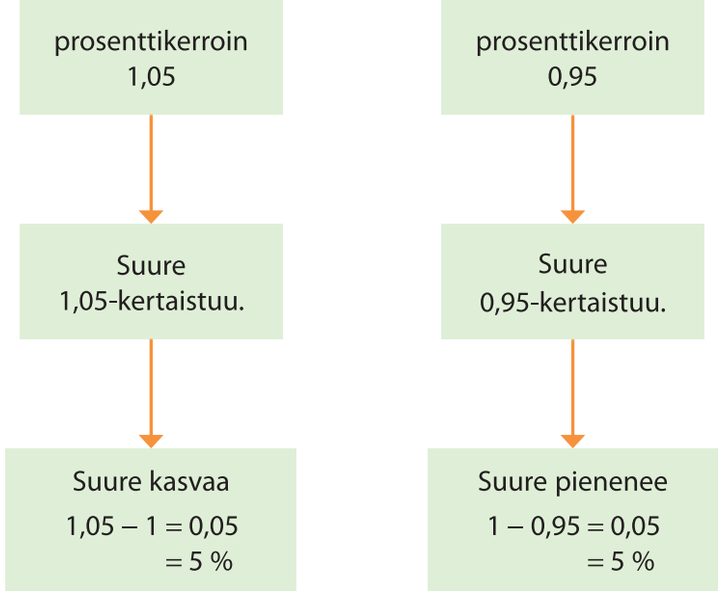
Potenssiyhtälöitä joudutaan ratkaisemaan usein myös tilanteissa, joissa käytetään eksponentiaalista mallia. Tällöin haetaan eksponentiaaliseen muutokseen liittyvää **prosenttikerrointa**.

Edellisissä luvuissa prosenttikerroin muodostettiin useimmiten prosenttiluvun avulla.



Jos prosenttikerroin on tuntematon, se voidaan ratkaista muodostamalla sopiva potenssiyhtälö. Yhtälön ratkaisuna saatavan prosenttikertoimen avulla

- nähdään mihin suuntaan tarkasteltavan suureen arvo muuttuu
- voidaan laskea muutoksen suuruus prosentteina.



ESIMERKKI 4

Inflaatiolla tarkoitetaan rahan ostovoiman heikkenemistä ja siitä seuraavaa hintojen nousua. Vuonna 2011 kaksion vuokra oli 860 €. Vuokra oli sidottu inflaatioprosenttiin. Viisi vuotta myöhemmin vuokra oli 970 €.

a) Määritä vuotuinen inflaatioprosentti, kun sen oletetaan olleen samansuuruinen koko viiden vuoden ajan.

b) Vuonna 2011 saman kaksion hinta oli 120 000 €. Taantuman vuoksi alueen asuntojen hinnat lähtivät laskuun ja kuusi vuotta myöhemmin asunnon hinnaksi arvioitiin 114 000 €. Kuinka monta prosenttia hinnat laskivat vuodessa, kun muutoksen oletetaan olleen joka vuosi yhtä monta prosenttia?

RATKAISU

a) Merkitään vuotuista muutosta kuvaavaa prosenttikerrointa kirjaimella k. Tällöin vuokra k-kertaistuu joka vuosi.

Vuodet	Vuokra (€)
1	$860 \cdot k$
2	$860 \cdot k^2$
5	$860 \cdot k^5$

Viiden vuoden kuluttua vuokra oli 970 €. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan prosenttikerroin k.

Lisämateriaali: Murtopotenssi s. 152

$$860 \cdot k^5 = 970$$

$$k = 1{,}02436...$$

Laskin saattaa antaa vastauksen murtopotenssimuodossa. Muuta vastaus desimaaliluvuksi.

Päätellään kertoimesta prosentuaalinen kasvu.

$$1{,}02436\ldots - 1 = 0{,}02436\ldots = 2{,}436\ldots\ \% \approx 2{,}4\ \%$$

b) Merkitään hintojen laskua kuvaavaa prosenttikerrointa kirjaimella x eli asunnon hinta x-kertaistuu joka vuosi. Kuuden vuoden kuluttua hinta on $120\,000 \cdot x^6$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x.

$$120\,000 \cdot x^6 = 114\,000$$

$$x = \pm 0{,}99148...$$

Muuta murtopotenssi desimaaliluvuksi.

Vain positiivinen luku kelpaa ratkaisuksi eli $x = 0{,}99148\ldots$ Päätellään kertoimesta prosentuaalinen muutos.

$$1 - 0{,}99148\ldots = 0{,}008512\ldots = 0{,}8512\ldots\ \% \approx 0{,}85\ \%$$

VASTAUS **a)** 2,4 % **b)** 0,85 %

Tehtävät

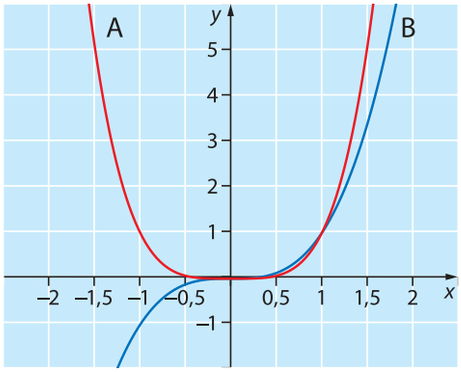
E1

127. Alla on esitetty funktioiden $f(x) = x^3$ ja $g(x) = x^4$ kuvaajat.

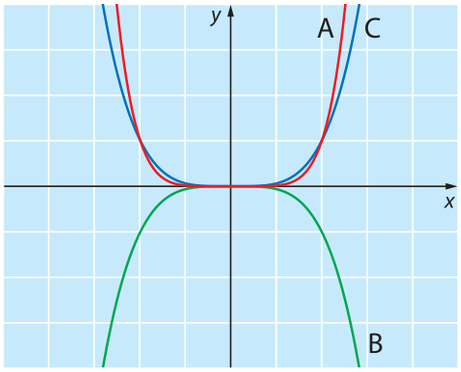
a) Yhdistä funktiot oikeisiin kuvaajiin A ja B.

b) Ratkaise kuvaajan avulla yhtälö $f(x) = -1$.

c) Ratkaise kuvaajan avulla yhtälö $f(x) = g(x)$.



128. Yhdistä kuvaajat A, B ja C funktioihin $f(x) = x^4$, $g(x) = -x^4$ ja $h(x) = x^6$. Perustele vastauksesi.



E2

129. Ratkaise yhtälö.

a) $2x^2 - 5 = 27$ **b)** $-x^3 = 1000$

c) $x^7 = 2$ **d)** $3x^8 - 9 = 0$

130. Olkoon $f(x) = x^3 + 3$.

a) Missä pisteessä funktion f kuvaaja leikkaa x-akselin?

b) Millä muuttujan x arvolla $f(x) = -5$?

131. Olkoon $g(x) = 2x^4 - 10$.

a) Määritä funktion nollakohdat.

b) Ratkaise yhtälö $g(x) = 4$.

E3

132. Pallon tilavuus V riippuu ainoastaan pallon säteestä r siten, että $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$.

a) Mikä on sellaisen pallon tilavuus, jonka säde on 3,60 cm?

b) Laske pallon säde, kun sen tilavuus on 1260 cm^3.

133. Kemiallisen reaktion nopeus määritellään reaktion lähtöaineiden häviämisnopeutena tai tuotteiden syntymisnopeutena. Erään reaktion nopeus (konsentraation muutos sekunnissa) tietyllä hetkellä riippuu lähtöaineen konsentraatiosta x seuraavasti:

$$v(x) = 0{,}0028x^4,$$

jossa x on aineen konsentraatio (mol/l)

a) Mikä on reaktion nopeus $\left(\frac{\text{mol/l}}{\text{s}}\right)$, kun konsentraatio on 1,2 mol/l?

b) Mikä on lähtöaineen konsentraatio, kun reaktion nopeus on $0{,}078\ \frac{\text{mol/l}}{\text{s}}$?

134. Auton jarrutusmatka f (metreinä) voitiin jäisellä pinnalla tehdyssä kokeessa laskea seuraavasti:

$$f(x) = \frac{1}{4000}x^3,$$

jossa x oli nopeus (km/h). Mikä oli auton nopeus, jos jarrutusmatka oli 85 m?

Lisämateriaali: Murtopotenssi s. 152

135. Elektronegatiivisuus on atomin ominaisuus, joka kuvaa sen kykyä vetää puoleensa yhteisiä elektroneja kovalenttisessa sidoksessa. Halogeenit ovat erittäin elektronegatiivisia. Halogeenin elektronegatiivisuus e voidaan arvioida sen suhteellisen atomimassan m avulla seuraavasti:

$$e(m) = 7{,}3463m^{-\frac{9}{40}}.$$

a) Laske fluorin elektronegatiivisuus, kun sen atomimassa on 19.

b) Mikä on bromin atomimassa, kun sen elektronegatiivisuusarvo on 2,8?

E4

136. Viime vuosina joidenkin kulutustavaroiden hinnat ovat nousseet ja joidenkin laskeneet. Kahvipaketin hinta vuonna 2000 oli (euroiksi muutettuna) 2,65 €. Samana vuonna tietokoneiden kovalevyissä yhden gigatavun hinta oli 2,90 €.

a) Vuonna 2011 kahvipaketin hinta oli 4,25 €. Kuinka monta prosenttia paketin hinta oli vuosittain noussut?

b) Vuonna 2016 yhden gigatavun hinta kovalevyissä oli 0,10 €. Kuinka monta prosenttia vuodessa gigatavun hinta on laskenut?

137. Hiivasolujen määrä viljelmässä oli noin 550 solua. Kymmenen tuntia myöhemmin viljelmän solujen määräksi arvioitiin 780. Kuinka monta prosenttia tunnissa solujen määrä kasvoi?

138. Ydinvoimaloissa muodostuu ydinreaktioiden yhteydessä tritiumia, jota pääsee lauhdutusveden mukana veteen. Tritium on vedyn radioaktiivinen isotooppi, jonka puoliintumisaika on 148 kuukautta. Puoliintumisaika on se aika, jossa esimerkiksi 1,0 grammasta tritiumia hajoaa puolet eli 0,50 grammaa. Kuinka monta prosenttia tritiumista hajoaa yhden kuukauden aikana?

139. Yrityksen henkilöstömäärä on 1844. Yritys tehostaa toimintojaan ja sen seurauksena vähentää henkilöstöään yhteensä 350 henkilöllä seuraavan neljän vuoden aikana. Tarkoitus on vähentää henkilöstöä joka vuosi yhtä monta prosenttia. Kuinka monta prosenttia on vuotuinen vähentämistarve?

140. Kaupungin sisäisen matkalipun hinta on 3,20 €. Kustannusten nousun takia lipun hintaa on korotettava 0,80 eurolla seuraavan viiden vuoden aikana. Kuinka monta prosenttia on vuosittain lipun hintaa korotettava, kun korotusprosentti on sama joka vuosi?

Sekalaisia

141. Ratkaise yhtälö.

a) $-x^8 + 2 = -3$ b) $-2x^3 - 4 = -2$ c) $\frac{3x^4}{8} = 6$

142. Kuution tilavuus on 128 cm^3. Laske kuution

a) sivun pituus b) kokonaispinta-ala.

143. Planeetan massa M (kg) voidaan laskea planeetan säteen x (m) avulla seuraavasti:

$$M(x) = \frac{gx^2}{6{,}674 \cdot 10^{-11}},$$

jossa g on planeetan putoamiskiihtyvyys.

a) Kuun pinnalla $g = 1{,}622$ m/s^2. Laske Kuun säde, kun Kuun massa on $7{,}342 \cdot 10^{22}$ kg.

b) Jupiterin pinnalla putoamiskiihtyvyys on 25,90 m/s^2. Laske Jupiterin tilavuus, kun sen massa on $1{,}899 \cdot 10^{27}$ kg.

144. Yliopistosta vuosittain valmistuneiden määrä eräässä kaupungissa on 3900 henkilöä. Tavoite on nostaa valmistuneiden määrä 4500 henkilöön seuraavan kuuden vuoden aikana. Mikä on asetettava vuotuiseksi kasvutavoitteeksi, kun määrää pyritään nostamaan joka vuosi yhtä monta prosenttia?

Lisämateriaali: Murtopotenssi s. 152

145. Nisäkäslajien aivojen kokoa voidaan verrata kehon kokoon EQ-luvulla, joka lasketaan lajin keskimääräisen edustajan massoista kaavalla

$$EQ = \frac{\text{aivojen massa}}{0{,}012 \cdot (\text{kehon massa})^{2/3}},$$

kun massat ilmoitetaan kilogrammoina.

a) Tyypillisen koiran massa on 10 kg, ja lajin EQ-luku on 1,0. Mikä on koiran aivojen massa?

b) Erään taulukon mukaan ihmisen EQ-luku on 7,5, ja ihmisaivojen massa on keskimäärin 1,35 kg. Mitä lukuarvoa on tällöin käytetty ihmisen keskimääräiselle massalle? [S2015, 4]

2.4 Sovelluksia

Pohdinta

Seuraavissa tilanteissa joudutaan ratkaisemaan joko muutosta kuvaava prosenttikerroin tai muutoskertojen määrä. Onko muodostettava potenssiyhtälö vai eksponenttiyhtälö? Muodosta tarvittavat yhtälöt.

a) Tilille talletetaan 6000 €. Korko lisätään pääomaan vuosittain. Kuinka suuri on talletuskoron oltava, jotta talletuksen arvo kasvaisi kymmenessä vuodessa 8000 euroon?

b) Platinan isotoopin Pt-197 puoliintumisaika on 18,3 h. Puoliintumisajalla tarkoitetaan sitä aikaa, jossa aineen määrästä on hajonnut puolet. Platinan määrä tarkastelun alussa on 2,4 g. Kuinka monta prosenttia platinasta on jäljellä tunnin kuluttua?

c) Bakteerien määrä kaksinkertaistuu kasvatusalustalla joka vuorokausi. Kuinka monen vuorokauden jälkeen bakteerien massa on 1,5 g, kun kokeen alkaessa niiden massa oli 0,20 g?

d) Yritys vähentää automatisaation takia henkilöstöään 25 % siten, että viiden vuoden aikana vuosittain henkilöstön määrä pienenee yhtä monta prosenttia. Mikä on vuotuinen vähentämistarve?

e) Leikkipuiston karusellin nopeus laskee jokaisella kierroksella neljäsosalla. Kuinka monen kierroksen jälkeen nopeus on enää 10 % alkuperäisestä?

f) Ratkaise kohdissa a–e esitetyt tehtävät.

Sanallisissa tehtävissä on muodostettava tilanteeseen sopiva matemaattinen malli. Jos tarkastellaan peräkkäisiä muutoksia, joissa suureen arvon suhteellinen muutos on aina sama, voidaan lähtötietojen avulla muodostaa yleensä joko potenssiyhtälö tai eksponenttiyhtälö.

Muutosta kuvaava prosenttikerroin on annettu, mutta muutoskertojen määrä on tuntematon.

Esimerkki:

Alueelle istutetaan 1200 fasaania. Fasaanien määrä **kasvaa 7 %** vuodessa. **Kuinka monen vuoden** kuluttua kannan koko on 2000 fasaania?

Tehtävässä kerrotaan **muutoksen suuruus prosentteina**.

Tehtävässä kysytään **muutoskertojen lukumäärää**.

Muodostetaan **eksponenttiyhtälö**.

Merkitään muutoskertojen lukumäärää eli vuosia kirjaimella x.

$$1200 \cdot 1{,}07^x = 2000$$

$$x = 7{,}550\ldots$$

Kannan koko on 2000 yksilöä 8 vuoden kuluttua.

Muutoskertojen määrä on annettu, mutta muutosta kuvaava prosenttikerroin on tuntematon.

Esimerkki:

Kopiokoneella suurennetaan kuvaa aina yhtä monta prosenttia joka kerta. Alkuperäisen kuvan leveys oli 7,0 cm. **Kuinka monta prosenttia** kuvan leveys suureni yhden kopioinnin aikana, kun **viidennen** kopion leveys oli 12,5 cm?

Tehtävässä kerrotaan **muutoskertojen lukumäärä**.

Tehtävässä kysytään **muutoksen suuruutta prosentteina**.

Muodostetaan **potenssiyhtälö**.

Merkitään suurennosta kuvaavaa prosenttikerrointa kirjaimella k.

$$7{,}0 \cdot k^5 = 12{,}5$$

$$k = 1{,}1229\ldots$$

Kuvan leveys suureni $1{,}1229\ldots - 1 = 0{,}1229\ldots \approx 12\ \%$.

ESIMERKKI 1

Funktio $f(t) = 285\ 000 \cdot 1{,}0065^t$ kuvaa erään asunnon hinnan (€) kehittymistä pääkaupunkiseudulla. Muuttuja t on aika vuosina nykyhetkestä alkaen.

a) Mikä on asunnon nykyhinta?
b) Kuinka monta prosenttia vuodessa hinta nousee?
c) Mikä olisi hinta viiden vuoden kuluttua?
d) Kuinka monen vuoden kuluttua hinta ylittää 300 000 euroa? Anna vastaus vuoden tarkkuudella.

RATKAISU

a) Nykyhetkeä kuvaa muuttuja arvo $t = 0$. Sijoitetaan arvo funktioon f.

$$f(0) = 285\ 000 \cdot 1{,}0065^0 = 285\ 000$$

b) Hinnan nousu voidaan päätellä muutosta kuvaavasta prosenttikertoimesta 1,0065.

$$1{,}0065 - 1 = 0{,}0065 = 0{,}65\ \%$$

c) Hinta viiden vuoden kuluttua lasketaan sijoittamalla $t = 5$ funktioon f.

$$f(5) = 285\ 000 \cdot 1{,}0065^5 = 294\ 383{,}6\ldots \approx 294\ 000\ (€)$$

d) Muodostetaan epäyhtälö $f(t) > 300\ 000$ ja ratkaistaan siitä t.

$$285\ 000 \cdot 1{,}0065^t > 300\ 000$$
$$t > 7{,}91\ldots$$

Tehtävän voi ratkaista myös yhtälön avulla.

Hinta ylittää 300 000 euroa 8 vuoden kuluttua.

VASTAUS **a)** 285 000 € **b)** 0,65 % **c)** 294 000 € **d)** 8 vuoden kuluttua

Joissakin tilanteissa joudutaan ratkaisemaan ensin muutosta kuvaava prosenttikerroin ja sen avulla muutoskertojen määrä. Tällöin on ratkaistava sekä potenssi- että eksponenttiyhtälö. Potenssiyhtälön ratkaisuna saatua prosenttikerrointa tulee käyttää eksponenttiyhtälössä mahdollisimman tarkkana arvona. Koska arvoja ei saa pyöristää kesken laskun, pitää yhtälöiden muodostamisen ja ratkaisemisen lisäksi osata käyttää laskinohjelman kopiointi- ja sijoitus-toimintoja.

Kopiokoneella suurennetaan kuvaa yhtä monta prosenttia joka kerta. Alkuperäisen kuvan leveys on 7,0 cm ja viidennen kopion leveys on 12,5 cm.

Kuinka monta kertaa alkuperäistä kuvaa tulee suurentaa kopiokoneella, jotta kuvan leveys olisi **yli** 25,0 cm?

Aikaisemmin (s. 98) on laskettu yhteen kopiointikertaan liittyvä prosenttikerroin ($k = 1{,}1229...$) potenssiyhtälön avulla.

Tehtävässä kysytään **muutoskertojen lukumäärää**, joten muodostetaan eksponenttiepäyhtälö.

Merkitään kopiointikertojen lukumäärää kirjaimella x.

$$7{,}0 \cdot 1{,}1229\ldots^{x} > 25{,}0$$

$$x > 10{,}977\ldots$$

Kuvaa tulee suurentaa 11 kertaa.

LASKINOHJE

- Tallenna laskimen muistiin aiemmin ratkaistu prosenttikerroin. esim. $k = 1{,}1229...$
- Älä kirjoita desimaalilukua vaan kopioi arvo edellisen yhtälön ratkaisusta.
- Epäyhtälö voidaan kirjoittaa laskimeen kirjaimen k avulla. $7{,}0 \cdot k^{x} > 25{,}0$
- Ratkaise epäyhtälöstä x.

ESIMERKKI 2

Säätiö lahjoittaa vuosittain tietyn summan kehitysyhteistyöhön. Säätiön hallitus on asettanut tavoitteeksi nostaa summaa 10,0 % siten, että summaa korotetaan vuosittain 1,9 %.

a) Kuinka monta vuotta 10,0 %:n tavoitteen saavuttamiseen kuluu?

b) Mikä olisi vuotuisen korotuksen oltava, jotta tavoite saavutettaisiin kolmessa vuodessa?

RATKAISU

a) Merkitään tämänhetkistä lahjoitussummaa kirjaimella a ($a > 0$).

Jos suureen alkuperäiselle arvolle ei anneta mitään lukuarvoa, on sitä merkittävä jollain kirjaimella.

Kun 10,0 %:n tavoite saavutetaan, lahjoitussumma on 1,1-kertaistunut eli se on $1{,}1a$.

Koska summa kasvaa 1,9 % vuodessa, se 1,019-kertaistuu joka vuosi.

Merkitään kysyttyjen vuosien määrää kirjaimella x, jolloin lahjoitussumma on x:n vuoden kuluttua $a \cdot 1{,}019^x$.

Kun yhtälö syötetään laskinohjelmaan, kertomerkki on useimmiten kirjoitettava näkyviin.

Merkitään lauseke yhtä suureksi kuin tavoite $1{,}1a$ ja ratkaistaan yhtälöstä x.

$$a \cdot 1{,}019^x = 1{,}1a$$

Ratkaise yhtälöstä x.

$$x = 5{,}06... \approx 5$$

Tavoite saavutetaan viidessä vuodessa.

b) Merkitään kasvua kuvaavaa prosenttikerrointa kirjaimella k. Summa siis k-kertaistuu vuosittain. Kolmen vuoden kuluttua summa on $a \cdot k^3$.

Kun yhtälö syötetään laskinohjelmaan, kertomerkki on useimmiten kirjoitettava näkyviin.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä k.

$$a \cdot k^3 = 1{,}1a$$

Ratkaise yhtälöstä k.

$$k = 1{,}03228...$$

Vuotuisen korotuksen on siis oltava $1{,}03228\ldots - 1 = 0{,}03228\ldots \approx 3{,}2\ \%$.

VASTAUS **a)** 5 vuotta **b)** 3,2 %

ESIMERKKI 3

Formula-auton nopeus mutkan jälkeen on 105 km/h. Oletetaan, että kuljettaja kiihdyttää nopeutta yhtä monta prosenttia sekunnissa, kunnes saavuttaa nopeuden 235 km/h. Kuinka monen sekunnin kuluttua tämä tapahtuu, kun nopeus viiden sekunnin kuluttua on 189 km/h? Anna vastaus sekunnin kymmenesosan tarkkuudella.

RATKAISU

Merkitään nopeuden kasvua kuvaavaa prosenttikerrointa kirjaimella k eli nopeus k-kertaistuu joka sekunti.

Aika (s)	Nopeus (km/h)
0	105
1	$105 \cdot k$
2	$105 \cdot k^2$
3	$105 \cdot k^3$

Viiden sekunnin kuluttua nopeus on siis $105 \cdot k^5$ (km/h). Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä k.

Lisämateriaali: Murtopotenssi s. 152

$$105 \cdot k^5 = 189$$

$$k = 1{,}1247\ldots$$

Laskinohjelma saattaa antaa vastauksen murtopotenssimuodossa. Muuta luku desimaaliluvuksi.

Merkitään nyt sitä aikaa, joka kuluu nopeuden 235 km/h saavuttamiseen, kirjaimella x. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä x.

$$105 \cdot 1{,}1247\ldots^x = 235$$

$$x = 6{,}853\ldots$$

$$x \approx 6{,}9$$

Kopioi edellä saatu prosenttikerroin tai talleta se laskimen muistiin. Älä pyöristä!

Nopeus 235 km/h saavutetaan 6,9 sekunnin kuluttua.

VASTAUS

6,9 s kuluttua

ESIMERKKI 4

Kaupunki joutuu pienentyneiden yhteisöverotulojen vuoksi kulukuurille. Kaupungin on säästettävä budjetistaan 6,5 % seuraavan neljän vuoden aikana. Säästöt toteutetaan siten, että budjettia leikataan joka vuosi yhtä monta prosenttia.

a) Kuinka monta prosenttia on asetettava vuotuiseksi säästötavoitteeksi?

b) Jos säästämistä jatketaan vielä neljän vuoden jälkeenkin, missä ajassa budjetti on pienentynyt 12 %?

RATKAISU

a) Merkitään tämänhetkistä budjettia kirjaimella a ($a > 0$). Neljän vuoden kuluttua budjetti on siis $0{,}935a$.

100 % – 6,5 % = 93,5 %

Merkitään vuotuista vähenemistä kuvaavaa prosenttikerrointa kirjaimella k eli budjetti k-kertaistuu vuosittain. Neljän vuoden kuluttua se on tällöin $a \cdot k^4$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä kerroin k.

$a \cdot k^4 = 0{,}935a$ ← Ratkaise yhtälöstä k.

$k = \pm 0{,}9833...$

Koska vain positiivinen luku kelpaa ratkaisuksi, $k = 0{,}9833\ldots$

Vuotuinen leikkaus on siis $1 - 0{,}9833\ldots = 0{,}0166\ldots \approx 1{,}7\ \%$.

b) Merkitään kysyttyä aikaa kirjaimella x eli budjetti on x:n vuoden kuluttua $0{,}9833\ldots^{x} \cdot a$.

Kun budjetista on leikattu 12 %, se on $0{,}88a$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä x.

Kopioi edellä saatu prosenttikerroin tai talleta se laskimen muistiin. Älä pyöristä!

$0{,}9833...^{x} \cdot a = 0{,}88a$

$x = 7{,}60... \approx 8$

Budjetti on pienentynyt 12 % kahdeksan vuoden kuluttua.

VASTAUS **a)** 1,7 % **b)** 8 vuoden kuluttua

Tehtävät

E1

146. Lammen happipitoisuutta h (mg/l) mallinnettiin funktiolla $h(x) = 13{,}0 \cdot 0{,}985^x$, jossa x oli aika kuukausina mittaushetkestä alkaen.

a) Mikä oli lammen happipitoisuus mittaushetkellä?

b) Kuinka monta prosenttia lammen happipitoisuus muuttui kuukauden aikana?

c) Mikä on happipitoisuus 12 kuukauden kuluttua?

d) Jos veden happipitoisuus alittaa 5,00 mg/l, useimmilla kaloilla alkaa esiintyä hapenpuutteesta johtuvia oireita. Jos happipitoisuus muuttuu jatkossa samalla tavalla, milloin tämä raja saavutetaan?

147. Ravintoliuoksessa kasvatettavan bakteeripopulaation yksilömäärä $N(t)$ kasvaa eksponentiaalisen mallin $N(t) = 1000 \cdot 1{,}25^t$ mukaisesti, kun aika t ilmoitetaan tunteina.

a) Mikä on populaation koko 24 tunnin kuluttua? Anna vastaus tuhannen bakteerin tarkkuudella.

b) Kuinka monta prosenttia populaatio kasvaa jokaisen tunnin aikana?

c) Kuinka monta tuntia kestää, että populaation koko ylittää miljoonan? [K2015, 8]

148. Henkilö saa virustartunnan. Virusten määrää esittää funktio $f(x) = 150 \cdot e^{0{,}05x}$, jossa x on tunteja tartunnan saamishetkestä.

a) Kuinka monta prosenttia virusten määrä kasvaa tunnissa?

b) Kuinka monta virusta potilaassa on 24 tunnin kuluttua?

c) Sairauden oireet puhkeavat, kun virusten määrä ylittää 2000. Kuinka monen tunnin kuluttua tartunnasta tämä tapahtuu?

E2

149. Sijoittaja tallettaa vuoden alussa summan korkeakorkoiselle tilille. Korko lisätään pääomaan aina vuoden lopussa.

a) Jos talletustilin korko on 2,4 %, missä ajassa sijoitus kaksinkertaistuu?

b) Kuinka suuri olisi vuosikoron oltava, jotta sijoitus kaksinkertaistuisi 15 vuodessa?

150. Kaupunkia vaivaavan asuntopulan takia päätetään rakentaa lisää korkotuettuja asuntoja.

a) Jos kaupungin asuntokanta kasvaa 0,20 % vuodessa, kuinka monessa vuodessa asuntojen määrä on kasvanut 5,0 %?

b) Kuinka monella prosentilla vuodessa asuntokannan olisi kasvettava, jotta kymmenen vuoden kuluttua asuntokanta olisi 4,0 % nykyistä suurempi?

151. Maalämpöpumppuja myyvän yrityksen liikevaihto kymmenkertaistui kahdessakymmenessä vuodessa. Kuinka monta prosenttia liikevaihto kasvoi vuodessa, kun vuotuinen kasvuprosentti pysyi koko ajan samana? Anna vastaus prosentin kymmenesosan tarkkuudella. [S2013, 10]

152. Yhdistyneet kansakunnat asetti vuosituhannen vaihteessa yhdeksi tavoitteekseen, että maailman hiilidioksidipäästöt olisivat vuonna 2015 merkittävästi pienemmät kuin vuonna 1990. Tavoite ei näytä toteutuvan, sillä vuosina 1990–2008 päästöjen määrä kasvoi 39 %. Oletetaan, että päästöjen vuotuinen kasvuprosentti on ollut aikavälillä 1990–2008 vakio. Kuinka monta prosenttia päästöt kasvavat yhteensä vuosina 1990–2015, jos niiden vuotuinen kasvuprosentti pysyy edelleen samana? Anna vastaus prosenttiyksikön tarkkuudella. [S2014, 12]

E3 **153.** Yritys suunnittelee sovelluksia mobiililaitteisiin. Yrityksen liikevaihto on tällä hetkellä 58 miljoonaa euroa. Ennusteiden mukaan liikevaihto tulee jatkossa kasvamaan vuosittain yhtä monta prosenttia.

a) Mikä on vuotuinen kasvuprosentti, kun viisi vuotta myöhemmin liikevaihdoksi ennustetaan 110 miljoonaa euroa?

b) Kuinka monen vuoden kuluttua liikevaihdon ennustetaan olevan jo 190 miljoonaa euroa?

154. Suomeen istutettiin 1930-luvulla 60 kanadanmajavaa.

a) Kanta kasvoi nopeasti ja 50 vuotta myöhemmin kannan kooksi arvioitiin jo 4000 majavaa. Jos kanta kasvoi joka vuosi yhtä monta prosenttia, mikä oli vuotuinen kasvu prosentteina? Anna vastaus prosentin kymmenysosan tarkkuudella.

b) Kuinka monessa vuodessa kanta kasvaa 12 000 majavaan?

155. Maailman väkiluvun kasvua kuvataan usein eksponentiaalisen mallin avulla. Vuonna 2004 väkiluku oli 6,4 miljardia ja vuonna 2010 noin 6,8 miljardia. Minä vuonna väkiluku ylittää mallin mukaan 10 miljardin rajan? [S2012, 12]

156. Radioaktiivisen näytteen aktiivisuudeksi mitattiin 25,0 kBq ja viisi vuorokautta myöhemmin 16,2 kBq. Laske puoliintumisaika ja näytteen aktiivisuus kymmenen vuorokautta ennen ensimmäistä mittausta. Radioaktiivisuus vähenee eksponentiaalisesti, ja puoliintumisaika on aika, jonka kuluessa aktiivisuus vähenee puoleen. [K2011, 11]

E4

157. Elintason kohoamisen ja parantuneen terveydenhuollon myötä eliniän odote on viimeisen 50 vuoden aikana kohonnut miehillä 17,5 %. Oletetaan, että eliniänodote on noussut tasaisesti yhtä monta prosenttia joka vuosi.

a) Kuinka monta prosenttia vuotuinen kasvu on ollut?

b) Lääketieteellisten läpimurtojen ja geeniteknologian ansiosta on ennustettu, että tulevaisuudessa eliniän odote voi jopa kaksinkertaistua. Jos kasvu jatkuu samanlaisena kuin tähänkin saakka, kuinka monessa vuodessa tämä tapahtuu?

158. Tehtaan on vähennettävä vesistöön joutuvia päästöjä yhteensä 20 prosenttia seuraavien neljän vuoden aikana.

a) Kuinka monta prosenttia on asetettava vuotuiseksi tavoitteeksi, kun halutaan, että suhteellinen vähennys on sama kaikkina vuosina?

b) Jos samaa vuotuista tavoitetta noudatetaan edelleen, kuinka monen vuoden kuluttua päästöt on saatu vähenemään alle puoleen alkuperäisestä määrästään? [K2006, 8]

159. Avaruusmatkojen suurimpia esteitä ovat suuret etäisyydet ja hitaat raketit. Oletetaan, että uusien tekniikoiden myötä rakettien nopeuksia voitaisiin kasvattaa joka vuosikymmen yhtä monta prosenttia siten, että 50 vuoden kuluttua raketit kulkisivat avaruudessa kaksinkertaisella nopeudella nykyraketteihin verrattuna.

a) Kuinka monta prosenttia nopeutta olisi yhden vuosikymmenen aikana kasvatettava?

b) Oman Aurinkokuntamme ulkopuolisiin kohteisiin nopeuksien olisi vähintään kymmenkertaistuttava, jotta matkustaminen olisi järkevää. Kuinka monessa vuodessa tähän tavoitteeseen päästäisiin?

Sekalaisia

160. Hiilidioksidi on yksi suurimmista ilmaston lämpenemistä aiheuttavista kasvihuonekaasuista. Ilman CO_2-pitoisuutta f (ppm-yksiköissä eli miljoonasosina tilavuudesta) voidaan mallintaa funktiolla $f(t) = 383 \cdot 1{,}0104^t$, jossa t on aika vuosina alkuhetkestä.

a) Mikä on CO_2-pitoisuus alkuhetkellä?

b) Oletetaan, että pitoisuuden muutos on pysynyt samanlaisena jo pidemmän aikaa. Milloin CO_2-pitoisuus oli 300 ppm?

c) Mikä on CO_2-pitoisuus 25 vuoden kuluttua?

161. Työehtosopimusneuvotteluissa työnantajat ja ammattijärjestöt sopivat keskitetyistä palkkaratkaisuista.

a) Neuvotteluissa sovitaan, että palkkoja nostetaan 4,8 % seuraavan viiden vuoden aikana. Jos nostot jaetaan viidelle vuodelle siten, että palkat nousevat joka vuosi yhtä monta prosenttia, mikä on vuotuinen palkankorotusprosentti?

b) Kuinka monta prosenttia palkkoja olisi vuosittain nostettava, jotta palkat nousisivat kolmen vuoden aikana yhteensä 4,0 %?

162. Facebook-palvelun käyttäjämäärät ovat koko ajan kasvaneet. Palvelun suosio 13-vuotiaiden ikäluokassa on kuitenkin viimeisen kolmen vuoden aikana laskenut 40 %. Oletetaan, että ikäluokan koko on pysynyt vakiona ja pysyy jatkossakin suurin piirtein samalla tasolla.

a) Jos lasku on kuluneen kolmen vuoden aikana ollut yhtä monta prosenttia joka vuosi, kuinka monella prosentilla käyttäjämäärä on vuosittain laskenut 13-vuotiaiden ikäluokassa?

b) Kuinka monen vuoden kuluttua Facebook-palvelun käyttäjiä on enää 20 % 13-vuotiaista?

163. Floridan rannikolta on löydetty fossiilisia hain hampaita, jotka ovat kuuluneet kymmeniätuhansia vuosia sitten sukupuuttoon kuolleelle valkohain esi-isälle. Kuinka vanha on hain hammas, kun sen sisältämän radioaktiivisen hiili-isotoopin C-14-pitoisuus on pienentynyt 9 prosenttiin elävässä organismissa olevasta C-14-pitoisuudesta? Isotoopin C-14 puoliintumisaika on noin 5730 vuotta. [S2000, 7]

3 Lukujonot matemaattisena mallina

Tavoitteena on

- kerrata aritmeettisen ja geometrisen jonon käsitteet
- kerrata aritmeettisen ja geometrisen summan laskeminen
- oppia käyttämään lukujonoja erilaisissa tilanteissa.

- Millaisissa tilanteissa voidaan käyttää mallina
  - aritmeettista jonoa
  - geometrista jonoa?
- Miten muodostetaan ja käytetään
  - aritmeettisen jonon yleistä jäsentä
  - geometrisen jonon yleistä jäsentä?
- Miten lasketaan aritmeettisen ja geometrisen jonon summa?

- Miten lukujonoja mallinnetaan koordinaatistossa?
- Miten muodostetaan ja ratkaistaan yhtälöitä
  - aritmeettisen jonon yleisen jäsenen avulla
  - geometrisen jonon yleisen jäsenen avulla
  - aritmeettisen summan kaavan avulla
  - geometrisen summan kaavan avulla
- Miten lukujonojen ja summien kuvaajia piirretään ja tulkitaan?

3.1 Aritmeettinen ja geometrinen jono

Pohdinta 1

Nella ja Joona säästävät rahaa lomamatkaa varten. He aloittavat säästämisen tammikuun ensimmäisenä päivänä laittamalla säästöön 15 €. Molemmat tekevät uuden talletuksen aina joka kuukauden ensimmäinen päivä.

- Nella korottaa joka kuukausi talletettavaa rahasummaa 5 €.
- Joona korottaa joka kuukausi talletettavaa rahasummaa 10 %.

a) Täydennä taulukko.

Kuukausi	Nellan kertatalletus (€)	Joonan kertatalletus (€)
Tammikuu		
Helmikuu		
Maaliskuu		

b) Nellan eri kuukausina tallettamaa rahasummaa voidaan kuvata aritmeettisen jonon avulla. Muodosta tämän aritmeettisen jonon yleinen jäsen a_n.

c) Joonan eri kuukausina tallettamaa rahamäärää voidaan kuvata geometrisen jonon avulla. Muodosta tämän geometrisen jonon yleinen jäsen a_n.

d) Laske yleisten jäsenten avulla Nellan ja Joonan kertatalletuksen suuruus saman vuoden joulukuussa.

Kuukausi	Nellan kertatalletus (€)	Joonan kertatalletus (€)
Joulukuu		

e) Kuinka monentena kuukautena Nellan ja Joonan kertatalletus on yli 100 €?

f) Piirrä lukujonojen kuvaajat samaan koordinaatistoon ja tutki kuvaajien avulla, kuinka monentena kuukautena Joonan kertatalletus ylittää Nellan kertatalletuksen suuruuden.

Aritmeettisen ja geometrisen jonon yleinen jäsen

Lukujen muodostamaa jonoa kutsutaan **lukujonoksi**. Lukujonon lukuja kutsutaan **jäseniksi** tai **termeiksi**. Jonossa olevilla luvuilla on tietty paikka, johon viitataan **järjestysluvulla**.

4, 7, 10, 13, …

Jonon **ensimmäinen** jäsen
$a_1 = 4$

Jonon **neljäs** jäsen
$a_4 = 13$

Lukujonoja on käsitelty on käsitelty yhteisellä kurssilla MAY1 (Luvut ja lukujonot).

Jotta lukujonoa voidaan käyttää tilanteen matemaattiseen mallintamiseen, jonossa olevien lukujen pitää muodostua tietyn säännön mukaan. Tärkeimpiä mallintamisessa käytettäviä lukujonoja ovat **aritmeettinen** ja **geometrinen jono**.

Aritmeettinen jono
4, 7, 10, 13,...

- Peräkkäisten jäsenten erotus on vakio.
  $a_2 - a_1 = 7 - 4 = 3$
  $a_3 - a_2 = 10 - 7 = 3$
  $a_4 - a_3 = 13 - 10 = 3$

- Erotusta kutsutaan differenssiksi d.
  $d = a_{n+1} - a_n = 3$

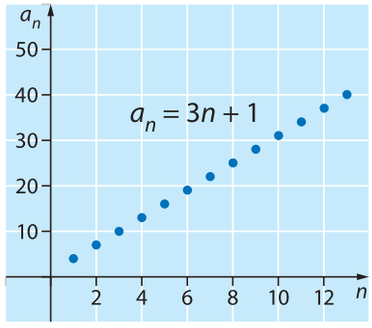
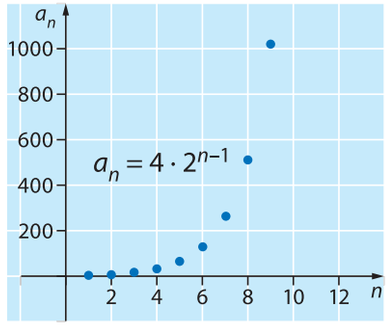
Geometrinen jono
4, 8, 16, 32,...

- Peräkkäisten jäsenten suhde on vakio.
  $\frac{a_2}{a_1} = \frac{8}{4} = 2$
  $\frac{a_3}{a_2} = \frac{16}{8} = 2$

- Suhdetta kutsutaan suhdeluvuksi q.
  $q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$

Kun muodostetaan sääntö jonossa olevien lukujen ja niiden järjestysluvun välille, saadaan lauseke, jota kutsutaan lukujonon **yleiseksi jäseneksi**.

Yleisen jäsenen avulla voidaan
- laskea minkä tahansa lukujonon jäsenen arvo
- määrittää, onko annettu luku tutkittavan lukujonon jäsen
- muodostaa yhtälöitä ja epäyhtälöitä
- piirtää lukujonon kuvaaja.

Aritmeettinen jono	**Geometrinen jono**
Aritmeettisen jonon **yleinen jäsen**: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ • a_1 on jonon ensimmäinen jäsen. • d on differenssi. • n on järjestysluku ($n = 1, 2, 3, \ldots$).	Geometrisen jonon **yleinen jäsen**: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ • a_1 on jonon ensimmäinen jäsen. • q on suhdeluku. • n on järjestysluku ($n = 1, 2, 3, \ldots$).
Esimerkiksi jonon 4, 7, 10, 13… yleinen jäsen: $a_n = 4 + (n-1) \cdot 3$ ($a_1 = 4$, $d = 3$) $= 4 + 3n - 3$ $= 3n + 1$	**Esimerkiksi** jonon 4, 8, 16, 32,… yleinen jäsen: $a_n = 4 \cdot 2^{n-1}$ ($a_1 = 4$, $q = 2$)
Aritmeettisen jonon **kuvaaja** 	Geometrisen jonon **kuvaaja** 

ESIMERKKI 1

Lukujonon kaksi ensimmäistä jäsentä ovat 4 ja –2.

a) Lukujono a_n on aritmeettinen jono. Muodosta lukujonon a_n yleisen jäsenen lauseke ja laske sen avulla a_{50}.

b) Lukujono a_n on geometrinen jono. Muodosta lukujonon a_n yleisen jäsenen lauseke ja laske sen avulla a_3.

RATKAISU

a) Aritmeettisen jonon yleisen jäsenen muodostamiseksi tarvitaan:

- jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 4$
- differenssi $d = -2 - 4 = -6$. ← $d = a_2 - a_1$

Muodostetaan jonon yleisen jäsenen lauseke.

$$\begin{aligned} a_n &= 4 + (n-1) \cdot (-6) \quad \leftarrow \; a_n = a_1 + (n-1)d \\ &= 4 - 6n + 6 \\ &= -6n + 10 \end{aligned}$$

Lasketaan lukujonon **50.** jäsen sijoittamalla järjestysluku yleisen jäsenen lausekkeeseen.

$$a_{50} = -6 \cdot 50 + 10 = -300 + 10 = -290$$

b) Geometrisen jonon yleisen jäsenen muodostamiseksi tarvitaan:

- jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 4$
- suhdeluku $q = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$ ← $q = \frac{a_2}{a_1}$

Muodostetaan jonon yleisen jäsenen lauseke.

$$a_n = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \leftarrow \; a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Lasketaan lukujonon **3.** jäsen sijoittamalla järjestysluku yleisen jäsenen lausekkeeseen.

$$a_3 = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{3-1} = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 4 \cdot \frac{1}{4} = 1$$

VASTAUS **a)** $a_n = -6n + 10$ ja $a_{50} = -290$ **b)** $a_n = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ja $a_3 = 1$

ESIMERKKI 2

Aritmeettisen jonon ensimmäinen jäsen on 6 ja kolmas jäsen 16.

a) Muodosta lukujonon yleinen jäsen.

b) Onko luku 54 lukujonon jäsen?

c) Kuinka moni lukujonon jäsen on pienempi kuin 200?

RATKAISU

a) Jonon kolmannelle jäsenelle voidaan muodostaa lauseke ensimmäisen jäsenen ja differenssin avulla.

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$a_3 = 6 + (3-1) \cdot d = 6 + 2d$

Kolmannen jäsenen arvo tunnetaan, joten muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan differenssi d.

$$\begin{aligned} a_3 &= 16 \\ 6 + 2d &= 16 \\ 2d &= 10 \qquad |:2 \\ d &= 5 \end{aligned}$$

Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$$a_n = 6 + (n-1) \cdot 5 = 6 + 5n - 5 = 5n + 1$$

b) Muodostetaan yleisen jäsenen avulla yhtälö ja tutkitaan, voiko luku 54 olla jonon jäsen.

$$\begin{aligned} a_n &= 54 \\ 5n + 1 &= 54 \\ 5n &= 53 \qquad |:5 \\ n &= \frac{53}{5} = 10\frac{3}{5} \end{aligned}$$

Koska ratkaisuksi saatu n:n arvo ei ole positiivinen kokonaisluku, luku 54 ei ole lukujonon jäsen.

c) Muodostetaan epäyhtälö $a_n < 200$ ja ratkaistaan siitä n.

$$\begin{aligned} 5n + 1 &< 200 \\ 5n &< 199 \qquad |:5 \\ n &< \frac{199}{5} = 39\frac{4}{5} \end{aligned}$$

Suurin kokonaisluku, joka toteuttaa epäyhtälön ratkaisun on 39, joten jonon 39 ensimmäistä jäsentä ovat pienempiä kuin 200.

VASTAUS **a)** $a_n = 5n + 1$ **b)** Luku ei ole lukujonon jäsen. **c)** 39 jäsentä

ESIMERKKI 3

Geometrisen jonon toinen jäsen on $\frac{1}{2}$ ja kuudes jäsen 8.

a) Muodosta lukujonon yleisen jäsenen lauseke.

b) Toinen a-kohdassa määritetyistä lukujonoista saa vain positiivisia arvoja. Tutki kuvaajien avulla, kumpi lukujonoista tämä on.

c) Kuinka monennesta jäsenestä alkaen b-kohdassa määritetyn lukujonon jäsenet ovat suurempia kuin 1 000 000?

RATKAISU

a) Yleisen jäsenen muodostamiseksi tarvitaan jonon ensimmäinen jäsen a_1 ja suhdeluku q. Kahden tiedon selvittämiseksi tarvitaan kaksi yhtälöä.

Kirjoitetaan jonon toinen ja kuudes jäsen ensimmäisen jäsenen ja suhdeluvun avulla.

- $a_2 = a_1 \cdot q^{2-1} = a_1 \cdot q$
- $a_6 = a_1 \cdot q^{6-1} = a_1 \cdot q^5$

Koska $a_2 = \frac{1}{2}$ ja $a_6 = 8$, saadaan kaksi yhtälöä, jotka molemmat pitävät paikkansa samalle lukujonolle. Yhtälöistä voidaan muodostaa yhtälöpari.

$$\begin{cases} a_2 = \frac{1}{2} \\ a_6 = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 \cdot q = \frac{1}{2} \\ a_1 \cdot q^5 = 8 \end{cases}$$

Ratkaise yhtälöpari ratkaisutoiminnolla. Muista kirjoittaa peräkkäisten kirjaimien väliin kertomerkki.

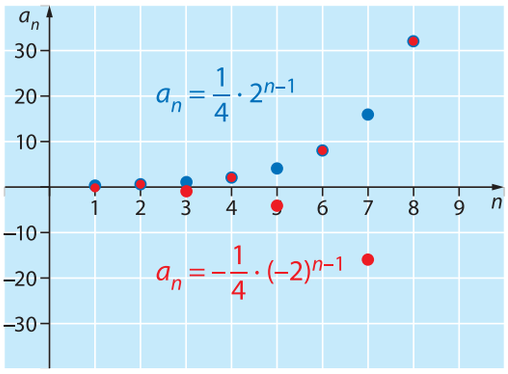
$$a_1 = -\frac{1}{4} \text{ ja } q = -2 \quad \text{tai} \quad a_1 = \frac{1}{4} \text{ ja } q = 2$$

On siis olemassa kaksi lukujonoa, jotka toteuttavat annetut ehdot. Lukujonon yleinen jäsen on:

$$a_n = -\frac{1}{4} \cdot (-2)^{n-1} \quad \text{tai} \quad a_n = \frac{1}{4} \cdot 2^{n-1}$$

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

b) Piirretään lukujonon kuvaajat piirto-ohjelmalla.



Positiivisia lukujonon jäseniä kuvaavat pisteet sijaitsevat vaaka-akselin yläpuolella.

Kuvaajien perusteella lukujonon $a_n = \frac{1}{4} \cdot 2^{n-1}$ arvot ovat aina positiivisia.

c) Kun jonon jäsenet ovat suurempia kuin 1 000 000, nämä toteuttavat ehdon $a_n > 1\,000\,000$.

$$\frac{1}{4} \cdot 2^{n-1} > 1\,000\,000$$

$$n > 22{,}931\ldots$$

Laskin voi antaa vastauksen luonnollisten logaritmien (ln) avulla. Muunna vastaus desimaaliluvuksi.

Ensimmäinen positiivinen kokonaiskulu, jota toteuttaa ehdon $n > 22{,}931\ldots$ on luku 23. Lukujonon 23. jäsenestä alkaen jäsenet ovat siis suurempia kuin 1 000 000.

VASTAUS **a)** $a_n = -\frac{1}{4} \cdot (-2)^{n-1}$ tai $a_n = \frac{1}{4} \cdot 2^{n-1}$ **b)** $a_n = \frac{1}{4} \cdot 2^{n-1}$

c) 23. jäsenestä alkaen

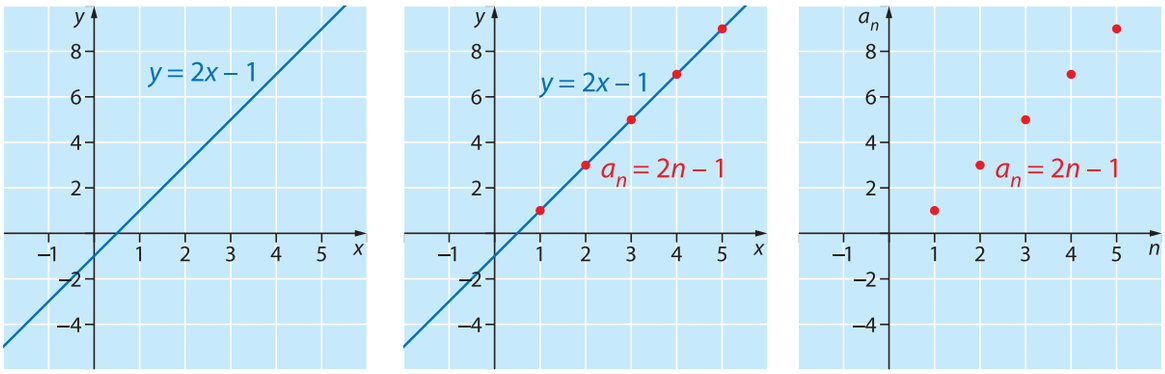
Laskimen tai muun apuvälineen käyttö

Lukujonon kuvaajan piirtäminen

- Selvitä, miten lukujonon kuvaajasta voi piirtää näkyviin vain tietyt jonon jäsenet.
- Kuvaajanäkymän akselien asteikkoja on usein muutettava niin, että saadaan halutut lukujonon jäsenet näkyviin.
- Jäljitä-toiminnon avulla voidaan helposti tarkastella kuvaajasta lukujonon jäsenien arvoja.

Mallintaminen lukujonoilla

Lineaarisen mallin avulla kuvataan tilanteita, joiden kuvaajana on suora. Jos suoralta poimitaan ne pisteet, joiden x-koordinaatti on positiivinen kokonaisluku, saadaan aritmeettisen jonon kuvaaja.



Lineaarisessa mallissa absoluuttinen muutos liittyy suoran kulmakertoimeen. Jos tilannetta mallinnetaan aritmeettisen jonon avulla, absoluuttinen muutos liittyy jonon differenssiin.

Aritmeettisen jonon avulla voidaan siis mallintaa tilanteita, joissa

- suureen absoluuttinen muutos pysyy vakiona
- suureen arvo a_n riippuu positiivisista kokonaisluvuista n.

Kioskissa myydään karkkeja 5,95 euron kilohinnalla.	
Lineaarinen malli	**Aritmeettinen jono**
Karkkeja voidaan ostaa mielivaltainen määrä. • Merkitään ostettujen karkkien määrää (kg) kirjaimella x. • Merkitään karkkiostoksen hintaa (€) kirjaimella y. Hinnan ja määrän välistä riippuvuutta voidaan kuvata lineaarisella mallilla $y = 5{,}95x$. • Muuttuja x voi saada **mitä tahansa positiivisia reaalilukuarvoja**.	Karkkeja voidaan ostaa vain esimerkiksi yhden kilon pusseissa. • Merkitään ostettujen pussien lukumäärää kirjaimella n. • Ostosten hintaa (€) kuvaa lukujonon yleinen jäsen a_n. Hinnan ja määrän välistä riippuvuutta voidaan kuvata aritmeettisella jonolla $a_n = 5{,}95n$. • Muuttuja n voi saada **vain positiivisia kokonaislukuarvoja**.

ESIMERKKI 4

Kunta teetti ennusteen kaupungin väestönkasvusta aikavälillä 2016–2035. Kunnan väkiluku vuonna 2016 oli 45 256 asukasta ja ennusteen mukaan väkiluku kasvaa tarkasteltavalla aikavälillä 384 asukkaalla vuosittain.

a) Muodosta jonon yleisen jäsenen lauseke.

b) Laske kunnan asukasluku vuonna 2035.

c) Minä vuosina kunnan asukasluku on yli 48 000 mutta alle 50 000 asukasta?

d) Piirrä lukujonon kuvaaja tarkasteltavalla aikavälillä.

RATKAISU

a) Jonon ensimmäinen jäsen on asukasluku vuonna 2016 eli $a_1 = 45\ 256$. Koska asukasluku kasvaa vuosittain aina yhtä monella asukkaalla, voidaan asukaslukua kuvata aritmeettisen jonon avulla.

Jonon differenssi on peräkkäisten vuosien asukasmäärien erotus eli $d = 384$.

Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

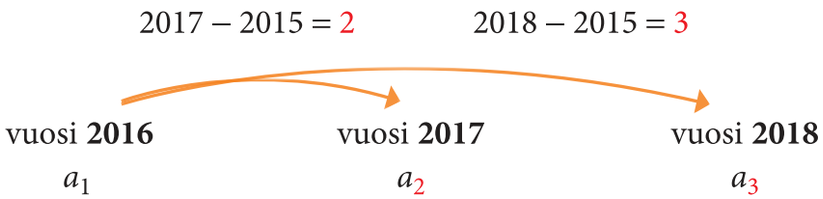
$$a_n = 45\ 256 + (n-1) \cdot 384$$

$$a_n = 384n + 44\ 872$$

Aritmeettisen jonon yleinen jäsen: $a_n = a_1 + (n-1)d$

Sievennä yleisen jäsenen lauseke laskinohjelmalla.

b) Koska vuoden 2016 asukasluku on lukujonon ensimmäinen jäsen, jäsenen järjestysluku saadaan, kun vuosiluvusta vähennetään 2015.



Tällöin vuoden 2035 asukasluku on jonon 2035 – 2015 = 20. jäsen.

$$a_{20} = 384 \cdot 20 + 44\ 872 = 52\ 552$$

Vuonna 2035 kunnassa on siis 52 552 asukasta.

c) Ratkaistaan ensin, kuinka mones lukujonon jäsen on arvoltaan yli 48 000.

$$a_n > 48\,000$$
$$384n + 44\,872 > 48\,000$$
$$n > \frac{391}{48}$$
$$n > 8{,}145...$$

Ensimmäinen positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa ehdon, on 9. Jonon 9. jäsen on vuoden 2015 + 9 = 2024 asukasluku.

Ratkaistaan vielä, monesko lukujonon jäsen on pienempi kuin 50 000.

$$a_n < 50\,000$$
$$384n + 44\,872 < 50\,000$$
$$n < \frac{641}{48}$$
$$n < 13{,}354...$$

Ensimmäinen positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa ehdon on 13. Jonon 13. jäsen on vuoden 2015 + 13 = 2028 asukasluku.

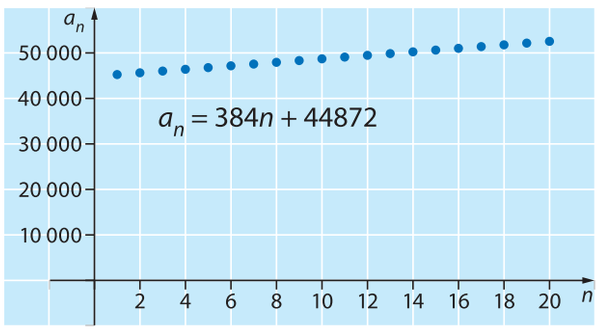
Asukasluku on yli 48 000 asukasta, mutta alle 50 000 vuosina 2024–2028.

d) Lukujonon kuvaajassa tulee näkyä jonon 20 ensimmäistä jäsentä, joten piirretään kuvaaja vain niistä jonon jäsenistä, joiden järjestysluku on 1–20.

Muutetaan koordinaatiston asteikkoja niin, että saadaan tarvittavat lukuarvot näkyviin.

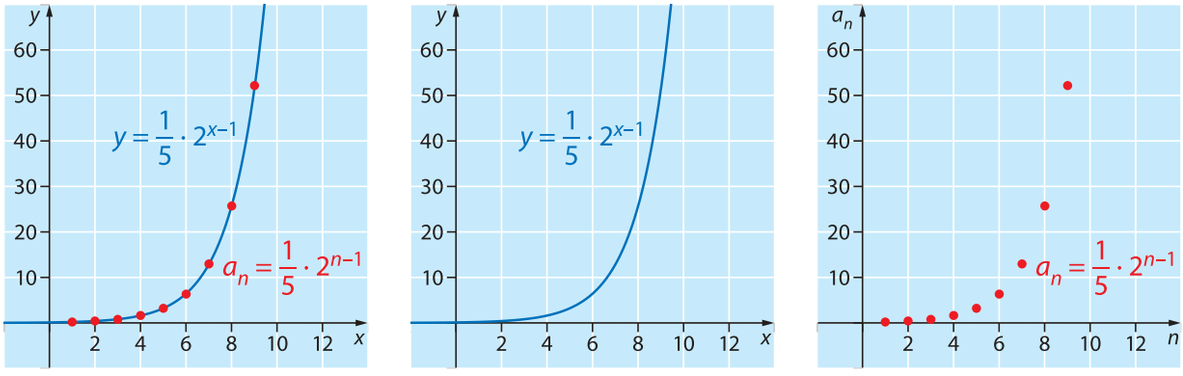
Vaaka-akselilla tulee näkyä lukuarvot 1–20.

Pystyakselilla tulee näkyä arvot aina vuoden 2035 asukaslukuun eli lukuun 52 552 saakka.



VASTAUS **a)** $a_n = 384n + 44\,872$ **b)** 52 552 asukasta
c) vuosina 2024–2028

Eksponentiaalisen mallin avulla kuvataan tilanteita, joiden kuvaajana on eksponenttifunktio. Jos eksponenttifunktion kuvaajalta poimitaan ne pisteet, joiden x-koordinaatti on positiivinen kokonaisluku, saadaan geometrisen jonon kuvaaja.



Eksponentiaalisessa mallissa suhteellinen muutos liittyy potenssin kantalukuun. Jos tilannetta mallinnetaan geometrisen jonon avulla, suhteellinen muutos liittyy jonon suhdelukuun.

Geometrisen jonon avulla voidaan siis mallintaa tilanteita, joissa
- suureen suhteellinen muutos pysyy vakiona
- suureen arvo a_n riippuu positiivisista kokonaisluvuista n.

Talletetaan 500 € tilille, jonka korkoprosentti on 2,3 %.	
Eksponentiaalinen malli	**Geometrinen jono**
Talletuksen voi nostaa korkoineen minä tahansa ajankohtana. • Merkitään talletusaikaa vuosina kirjaimella x. • **Muuttuja x voi saada mitä tahansa positiivisia reaalilukuarvoja**. • Tilillä olevaa rahamäärää ajanhetken x kuluttua kuvaa funktio $f(x) = 500 \cdot 1{,}023^x$.	Talletuksen voi nostaa korkoineen vain esimerkiksi tasavuosien kuluttua talletuksen tekohetkestä. • Merkitään talletusvuosien lukumäärää kirjaimella n. • **Muuttuja n voi saada vain positiivisia kokonaisluku-arvoja**. • Tilillä olevaa rahamäärää n vuoden kuluttua kuvaa yleinen jäsen $a_n = 500 \cdot 1{,}023^n$.

ESIMERKKI 5

Lukiolaisten määrä Suomessa on vähentynyt vuosina 2005–2015 vuosittain 1,27 %. Vuonna 2005 Suomessa oli 118 300 lukiolaista.

a) Muodosta lukujonon yleinen jäsen.

b) Kuinka paljon Suomessa oli mallin mukaan lukiolaisia vuonna 2015?

c) Minä vuonna lukiolaisten määrä alittaisi 100 000 opiskelijan rajan, jos lukiolaisten määrä vähenisi yhtä monta prosenttia vuosittain myös vuoden 2015 jälkeen?

RATKAISU

a) Koska opiskelijamäärä vähenee vuosittain aina yhtä monta prosenttia, voidaan opiskelijamääriä kuvata geometrisen jonon avulla.

Lukujonon ensimmäinen jäsen on lukiolaisten määrä vuonna 2005 eli $a_1 = 118\,300$. Lukiolaisten määrä vähenee joka vuosi 1,27 %, joten prosenttikerroin eli jonon suhdeluku on

$$100\,\% - 1{,}27\,\% = 98{,}73\,\% = 0{,}9873.$$

Muodostetaan lukujonon yleinen jäsen:

- $a_1 = 118\,300$
- $q = 0{,}9873$

$$a_n = 118\,300 \cdot 0{,}9873^{n-1}$$

b) Lasketaan ensin kuinka mones jonon jäsen on vuoden 2015 lukiolaisten määrä.

$$2015 - 2004 = 11$$

Koska jonon ensimmäinen jäsen on vuoden 2005 opiskelijamäärä, on vuosiluvusta vähennettävä 2004.

Lasketaan jonon 11 jäsen.

$$a_{11} = 118\,300 \cdot 0{,}9873^{11-1} = 104\,106{,}08\ldots \approx 104\,100$$

c) Ratkaistaan epäyhtälö $a_n < 100\,000$.

$$118\,300 \cdot 0{,}9873^{n-1} < 100\,000$$

$$n > 14{,}148\ldots$$

Ensimmäinen positiivinen kokonaisluku, joka täyttää ehdon on 15. Lasketaan minkä vuoden lukiolaisten määrä on jonon 15. jäsen.

$$2004 + 15 = 2019$$

VASTAUS

a) $a_n = 118\,300 \cdot 0{,}9873^{n-1}$ **b)** 104 100 lukiolaista

c) vuonna 2019

Tehtävät

Aritmeettisen ja geometrisen jonon yleinen jäsen

164. Tutki, onko lukujono aritmeettinen, geometrinen vai ei kumpaakaan.

a) 3, 7, 11, …

b) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$

c) –4, –8, –16, …

d) 2, 6, 12, …

E1

165. Lukujonon kaksi ensimmäistä jäsentä ovat –6 ja –3.

a) Lukujono a_n on aritmeettinen jono. Muodosta lukujonon a_n yleisen jäsenen lauseke ja määritä sen avulla a_{20}.

b) Lukujono a_n on geometrinen jono. Muodosta lukujonon a_n yleisen jäsenen lauseke ja määritä sen avulla a_5.

166. Muodosta aritmeettisen jonon yleinen jäsen a_n ja laske a_{10}, kun

a) $a_1 = 3$ ja $a_2 = -2$

b) $a_1 = \frac{1}{3}$ ja $a_2 = \frac{1}{2}$.

167. Muodosta geometrisen jonon yleinen jäsen a_n ja laske a_4, kun

a) $a_1 = 5$ ja $a_2 = 10$

b) $a_1 = \frac{1}{4}$ ja $a_2 = \frac{3}{4}$.

E2

168. Aritmeettisen jonon ensimmäinen jäsen on –4 ja kolmas jäsen 6.

a) Muodosta lukujonon yleinen jäsen.

b) Onko luku 26 lukujonon jäsen?

c) Kuinka moni lukujonon jäsenistä on pienempi kuin 40?

169. Aritmeettiselle jonolle $a_1 = 2$ ja $a_5 = -6$.

a) Laske jonon differenssi d.

b) Laske a_{500}.

c) Tutki, onko luku –38 jonon jäsen.

170. Aritmeettisen jonon toinen jäsen on 3 ja viides jäsen on 15.

a) Mikä on jonon ensimmäinen jäsen?

b) Kuinka mones jonon jäsen on ensimmäisen kerran suurempi kuin 50?

171. Lukujonon kolmas jäsen on 9. Muodosta lukujonon yleinen jäsen, kun jono on

a) aritmeettinen ja jonon kahden peräkkäisen jäsenen erotus on 3

b) geometrinen ja jonon kahden peräkkäisen jäsenen suhde on 3.

172. Geometrisen jonon kaksi ensimmäistä jäsentä ovat –4 ja –3.

a) Muodosta jonon yleisen jäsenen lauseke a_n.

b) Laske a_9. Anna vastaus tarkkana arvona sekä likiarvona kolmen desimaalin tarkkuudella.

c) Kuinka moni jonon jäsenistä on pienempi kuin –0,001?

E3

173. Geometrisen jonon kolmas jäsen on 1 ja seitsemäs jäsen 16.

a) Muodosta jonon yleisen jäsenen lauseke.

b) Piirrä lukujonojen kuvaajat. Kumpi a-kohdan lukujonoista saa vain positiivisia arvoja?

c) Kuinka monennesta jäsenestä alkaen b-kohdassa määritetyn lukujonon jäsenet ovat suurempia kuin 500 000?

174. Geometrisen jonon suhdeluku on $\frac{3}{2}$ ja $a_3 = 4$.

a) Määritä jonon yleisen jäsenen lauseke a_n.

b) Laske a_9.

c) Piirrä lukujonon kuvaaja.

d) Kuinka monennesta jäsenestä alkaen jonon jäsenet ovat suurempia kuin 2000?

175. Aritmeettiselle jonolle $a_5 = 45$ ja $a_{132} = 1061$.

a) Muodosta jonon yleinen jäsen a_n.

b) Laske a_{534}.

c) Onko luku 6933 jonon jäsen?

d) Kuinka moni jonon jäsen on pienempi kuin 75 000?

176. Lukujonon toinen jäsen on 2 ja viides jäsen 16.

a) Muodosta jonon yleinen jäsen a_n, kun jono on aritmeettinen.

b) Muodosta jonon yleinen jäsen b_n, kun jono on geometrinen.

c) Piirrä lukujonojen kuvaajat samaan koordinaatistoon. Piirrä näkyviin kummastakin lukujonosta kuusi ensimmäistä jäsentä.

Jonon yleinen jäsen voidaan nimetä minkä kirjaimen avulla tahansa. Jos tehtävässä on useita lukujonoja, niille kannattaa antaa eri nimi.

Mallintaminen lukujonoilla

177. Juomalaseista rakennetaan pyramidin muotoinen asetelma. Ylimpään kerrokseen tulee yksi juomalasi. Seuraavaan kerrokseen tulee aina neljä juomalasia enemmän kuin edelliseen kerrokseen. Juomalasien määrää eri kerroksissa voidaan kuvata lukujonon avulla.

a) Muodosta lukujonon yleinen jäsen.

b) Rakennelmassa on yhteensä 23 kerrosta. Kuinka monta juomalasia on rakennelman viimeisessä kerroksessa?

c) Voiko rakennelman jossain kerroksessa olla tasan 50 juomalasia?

E4

178. Vuonna 2001 Suomessa oli 989 kirjastoa. Aikavälillä 2001–2015 kirjastojen määrä väheni keskimäärin 16 kirjastolla vuosittain. Kirjastojen lukumäärää eri vuosina voidaan kuvata aritmeettisen jonon avulla.

a) Muodosta jonon yleisen jäsenen lauseke.

b) Kuinka monta kirjastoa mallin mukaan Suomessa oli vuonna 2015?

c) Minä vuosina kirjastojen määrä oli välillä 850–950?

d) Piirrä lukujonon kuvaaja tarkasteltavalla aikavälillä.

179. Paikallisbussi aloittaa aamulla liikennöinnin eräällä reitillä kello 6.00. Bussit kulkevat tällä reitillä 13 minuutin välein. Reitille lähtevien bussien lähtöaikoja minuutteina ensimmäisen bussin lähdöstä voidaan kuvata aritmeettisen jonon avulla.

a) Muodosta jonon yleinen jäsen.

b) Mihin kellonaikaan lähtee päivän 20. bussi?

c) Viimeinen bussi lähtee klo 22.02. Kuinka monta bussin lähtöä päivänaikana tapahtui?

180. Artturi on ottanut 1500 €:n lainan. Hän lyhentää lainaa 80 €:n maksuerissä. Jäljellä olevan lainan määrää voidaan kuvata aritmeettisen jonon avulla. Jonon ensimmäinen jäsen on lainan määrä ensimmäisen lyhennyksen jälkeen.

a) Muodosta lukujonon yleinen jäsen.

b) Kuinka paljon Artturilla on jäljellä lainaa 13 maksuerän jälkeen?

c) Kuinka monta maksuerää tarvitaan lainan takaisinmaksamiseksi? Viimeisen maksuerän suuruus saa poiketa muiden maksuerien suuruudesta, mutta ei saa ylittää 80 euroa.

d) Kuinka suuri on lainan viimeinen maksuerä?

E5 **181.** Suomalaiset tekivät vuonna 2015 yhteensä 8 137 000 vapaa-ajanmatkaa ulkomaille. Matkojen määrä oli 2,6 % edellisvuotta suurempi. Oletetaan, että kasvu jatkuu samanlaisena seuraavien vuosien aikana. Tällöin suomalaisten tekemien ulkomaanmatkojen määrää eri vuosina voidaan kuvata geometrisen jonon avulla.

a) Muodosta lukujonon yleinen jäsen.

b) Kuinka monta ulkomaanmatkaa suomalaiset tekevät mallin mukaan vuonna 2020?

c) Minä vuonna suomalaisten tekemien ulkomaanmatkojen määrä ylittäisi 10 miljoonan matkan rajan?

182. Marjaana tallettaa 8000 euroa sijoitustilille, jonka korkoprosentti on 2,5 %. Korko lisätään tilillä olevaan pääomaan aina vuosittain. Tilillä olevat rahamäärät koron lisäyksen jälkeen muodostavat geometrisen lukujonon.

a) Muodosta jonon yleinen jäsen.

b) Kuinka paljon sijoitustilillä on rahaa 10 vuoden kuluttua? Anna vastaus euron tarkkuudella.

c) Kuinka monen vuoden kuluttua sijoitustilillä on rahaa yli 12 000 €?

Sekalaisia

183. Lukujonon kaksi ensimmäistä jäsentä ovat 2 ja 6. Muodosta lukujonon yleinen jäsen a_n ja laske a_4, kun jono on

a) aritmeettinen **b)** geometrinen.

184. Aritmeettisen jonon kolmas jäsen on -1 ja kuudes jäsen 5.

a) Laske d ja a_1.

b) Muodosta jonon yleinen jäsen a_n.

c) Laske a_{65}.

d) Onko luku 103 jonon jäsen?

e) Kuinka moni lukujonon jäsenistä on pienempiä kuin 80?

---

185. Geometrisen jonon kolmas jäsen on $\frac{1}{3}$ ja kuudes jäsen $\frac{64}{375}$.

a) Muodosta jonon yleisen jäsenen lauseke.

b) Piirrä lukujonon kuvaaja.

c) Laske a_{10}. Anna vastaus kolmen desimaalin tarkkuudella.

d) Kuinka monennesta jäsenestä alkaen lukujonon jäsenet ovat pienempiä kuin 0,0001?

186. Vuosina 1990–2013 asuntokanta Suomessa on kasvanut keskimäärin 30 000 asunnolla vuosittain. Vuonna 2013 Suomessa oli 2 906 000 asuntoa. Asuntojen määrää eri vuosina voidaan kuvata lukujonon avulla.

a) Kuinka monta asuntoa Suomessa oli vuonna 1990?

b) Muodosta lukujonon yleinen jäsen ja piirrä lukujonon kuvaaja tarkasteltavalla aikavälillä.

c) Jos asuntokannan kasvu jatkuisi samanlaisena, minä vuonna asuntojen määrä ylittäisi 3,2 miljoonan asunnon rajan?

187. Tilastokeskuksen tutkimusten mukaan Suomessa oli vuonna 2015 työttömänä keskimäärin 252 000 henkilöä. Työttömien määrää pyritään vähentämään erilaisin keinoin. Oletetaan, että työttömien määrää pystytään vähentämään 6,5 % vuodessa. Kuvataan työttömien määrää eri vuosina lukujonon avulla.

a) Muodosta lukujonon yleinen jäsen, kun $a_1 = 252\,000$.

b) Kuinka monta työtöntä Suomessa on mallin mukaan vuonna 2025?

c) Minä vuonna työttömien määrä on mallin mukaan alle puolet vuoden 2015 määrästä?

3.2 Aritmeettinen summa

Pohdinta

Saaga rakentaa pikkuveljensä Viljon kanssa palikoista tornin. Tornin ylimpään kerrokseen tulee kaksi palikkaa. Seuraaviin kerroksiin tulee aina kolme palikkaa edellistä kerrosta enemmän. Palikoiden lukumäärät eri kerroksissa muodostavat aritmeettisen jonon. Saagalla ja Viljolla on käytössä yhteensä 500 palikkaa.

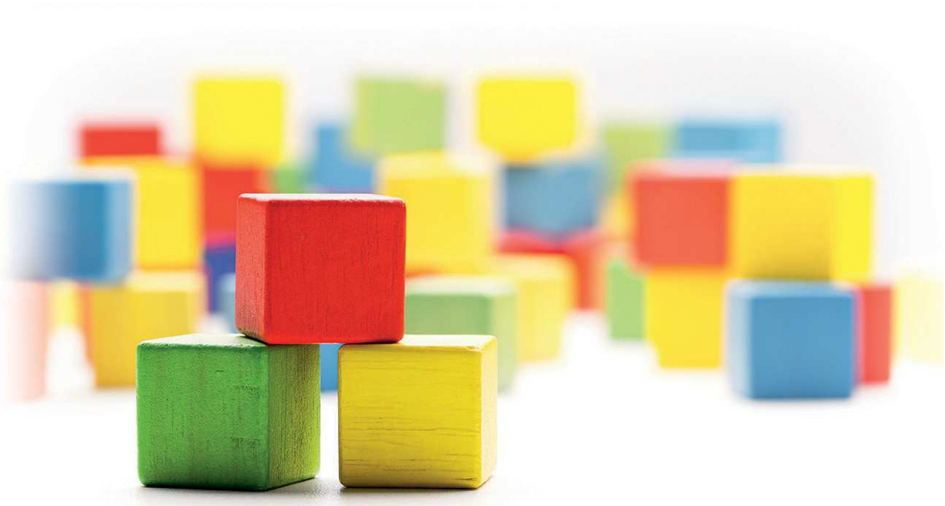
a) Muodosta jonon yleinen jäsen.

b) Kuinka monta palikkaa on tornin 9. kerroksessa?

c) Laske summakaavan avulla, kuinka monta palikkaa tornin yhdeksässä kerroksessa on yhteensä.

d) Kuinka monikerroksisen tornin he voivat rakentaa?

e) Kuinka monta palikkaa jää käyttämättä?



Tarkastellaan lukujonoa 3, 5, 7, … Lukujono on aritmeettinen, koska peräkkäisten jäsenten erotus on vakio.

$$\left.\begin{aligned} 5-3&=2\\ 7-5&=2 \end{aligned}\right\} \quad \text{differenssi } d=2$$

Muodostetaan jonon yleisen jäsenen lauseke.

$$a_n = 3 + (n-1)\cdot 2 = 2n+1.$$

Kun äärellinen määrä aritmeettisen jonon peräkkäisiä jäseniä lasketaan yhteen, muodostuu **aritmeettinen summa**. Aritmeettisen summan arvo voidaan laskea, kun tunnetaan ensimmäinen ja viimeinen yhteenlaskettava sekä yhteenlaskettavien lukumäärä.

$$\underbrace{3+5+7+9+11+13+15}_{7 \text{ yhteenlaskettavaa}} = 7\cdot\frac{3+15}{2} = 63$$

Aritmeettinen summa

$$s_n = n\cdot\frac{a_1+a_n}{2}$$

Aritmeettinen summa

Kun aritmeettisen jonon a_1, a_2 , a_3, … peräkkäisiä jäseniä lasketaan yhteen, muodostuu aritmeettinen summa.

$$S_n = n\cdot\frac{a_1+a_n}{2}$$

- n on yhteenlaskettavien määrä.
- a_1 on ensimmäinen yhteenlaskettava.
- a_n on viimeinen yhteenlaskettava.
- a_n on lukujonon yleinen jäsen.

Summa voidaan merkitä myös summamerkin $\sum$ avulla. Tällöin tarvitaan ensimmäisen ja viimeisen yhteenlaskettavan järjestysnumerot sekä yleisen jäsenen lauseke.

$$3+5+7+9+11+13+15 = \sum_{n=1}^{7}(2n+1)$$

$a_n = 2n + 1$

Ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 3$.

Viimeinen yhteenlaskettava $a_7 = 15$.

ESIMERKKI 1

a) Laske aritmeettisen jonon 5, 9, 13, … sadan ensimmäisen jäsenen summa.

b) Laske aritmeettinen summa $4 + 6 + \ldots + 62$.

RATKAISU

a) Summan laskemiseen tarvitaan

- ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 5$
- viimeinen yhteenlaskettava a_{100}
- yhteenlaskettavien määrä 100.

Muodostetaan ensin lukujonon yleinen jäsen.

$a_n = a_1 + (n-1)d$
$d = 9 - 5 = 4$

$$a_n = 5 + (n-1) \cdot 4 = 5 + 4n - 4 = 4n + 1$$

Viimeinen yhteenlaskettava voidaan selvittää yleisen jäsenen avulla.

$$a_{100} = 4 \cdot 100 + 1 = 401$$

Lasketaan summan arvo summakaavalla.

$$S_{100} = 100 \cdot \frac{5 + 401}{2} = 100 \cdot \frac{406}{2} = \frac{40\,600}{2} = 20\,300$$

$s_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$

b) Summan laskemiseen tarvitaan

- ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 4$
- viimeinen yhteenlaskettava $a_n = 62$
- yhteenlaskettavien määrä n.

Yhteenlaskettavien määrä saadaan selville, kun ratkaistaan viimeisen yhteenlaskettavan järjestysnumero.

Muodostetaan ensin lukujonon yleinen jäsen.

$a_n = a_1 + (n-1)d$
$d = 6 - 4 = 2$

$$a_n = 4 + (n-1) \cdot 2 = 4 + 2n - 2 = 2n + 2$$

Muodostetaan yleisen jäsenen avulla yhtälö $a_n = 62$ ja ratkaistaan siitä n.

$$2n + 2 = 62$$
$$2n = 60 \quad | : 2$$
$$n = 30$$

Lasketaan summan arvo summakaavalla.

$$S_{30} = 30 \cdot \frac{4 + 62}{2} = 30 \cdot 33 = 990$$

$s_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$

VASTAUS **a)** 20 300 **b)** 990

ESIMERKKI 2

Laske aritmeettinen summa.

a) $\sum_{n=1}^{10}(3n+5)$ **b)** $\sum_{n=11}^{30}(4n-6)$

RATKAISU

a) Summan arvo voidaan laskea ilman laskinta summakaavan $S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$ avulla.

Summassa lasketaan yhteen 10 ensimmäistä lukujonon jäsentä. Selvitetään yleisen jäsenen $a_n = 3n + 5$ avulla ensimmäinen ja viimeinen yhteenlaskettava.

- Ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_1 = 3 \cdot 1 + 5 = 8$.
- Viimeinen yhteenlaskettava on $a_{10} = 3 \cdot 10 + 5 = 35$.

Lasketaan summan arvo summakaavalla.

$$S_{10} = 10 \cdot \frac{8 + 35}{2} = 10 \cdot \frac{43}{2} = \frac{\overset{5}{\cancel{10}} \cdot 43}{\cancel{2}_1} = 5 \cdot 43 = 215$$

$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$

b) Lasketaan yleisen jäsenen $a_n = 4n - 6$ avulla ensimmäinen ja viimeinen yhteenlaskettava.

- Ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_{11} = 4 \cdot 11 - 6 = 38$.
- Viimeinen yhteenlaskettava on $a_{30} = 4 \cdot 30 - 6 = 114$.

Summassa on 20 yhteenlaskettavaa.

$\underbrace{a_1, a_2, a_3, ..., a_9, a_{10}}_{\text{jonon 10 ensimmäistä jäsentä}}$ $\underbrace{a_{11}, a_{12}, ..., a_{30}}_{\text{jonon } 30 - 10 = 20 \text{ seuraavaa jäsentä}}$

Lasketaan summan arvo summakaavalla.

$$S_{20} = 20 \cdot \frac{38 + 114}{2} = 20 \cdot \frac{152}{2} = \frac{\overset{10}{\cancel{20}} \cdot 152}{\cancel{2}_1} = 10 \cdot 152 = 1520$$

VASTAUS **a)** 215 **b)** 1520

ESIMERKKI 3

Tarkastellaan aritmeettista summaa $1 + 4 + 7 + \ldots$

a) Kuinka monta jäsentä on laskettava yhteen, jotta summa juuri ja juuri ylittää arvon 500 000?

b) Aritmeettiset summat S_1, S_2, … muodostavat lukujonon. Piirrä tämän lukujonon kuvaaja niin, että kuvaajassa näkyy jonon kahdeksan ensimmäistä jäsentä.

RATKAISU

a) Muodostetaan ensin jonon yleinen jäsen.

- Jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 1$.
- Differenssi $d = 4 - 1 = 3$.

Yleinen jäsen $a_n = 1 + (n - 1) \cdot 3 = 3n - 2$.

Muodostetaan lauseke summalle, kun lasketaan yhteen n kappaletta jonon jäseniä.

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} = n \cdot \frac{1 + (3n - 2)}{2} = \frac{n(3n - 1)}{2}$$

Sievennä lauseke laskimen avulla.

Ratkaistaan epäyhtälön avulla, milloin summa ylittää arvon 500 000.

$$S_n > 500\,000$$

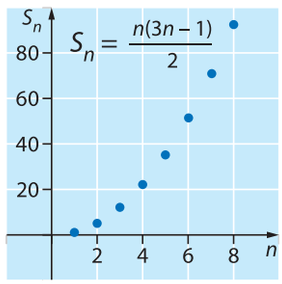
$$\frac{n(3n - 1)}{2} > 500\,000$$

$$n < -577{,}18\ldots \quad \text{tai} \quad n > 577{,}51\ldots$$

Järjestysnumero n on positiivinen kokonaisluku. Pienin positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa epäyhtälön, on 578.

b) Summista muodostuvan lukujonon yleinen jäsen on $S_n = \frac{n(3n - 1)}{2}$.

Piirretään kuvaaja tämän lukujonon kahdeksasta ensimmäisestä jäsenestä.



VASTAUS

a) 578 jäsentä

ESIMERKKI 4

Kesäteatterin katsomon ensimmäisellä rivillä on 30 istumapaikkaa. Istumapaikkojen määrä kasvaa aina kuudella, kun siirrytään seuraavalle riville. Katsomon viimeisen rivin istumapaikkojen määrä ei noudata tätä sääntöä, vaan viimeisellä rivillä on vähemmän paikkoja kuin edellisellä rivillä. Kesäteatterissa on yhteensä istumapaikat 800 katsojalle. Kuinka monta penkkiriviä kesäteatterin katsomossa on, ja kuinka monta istumapaikkaa on viimeisellä rivillä?

RATKAISU

Istumapaikkojen määrät eri riveillä (viimeistä riviä lukuun ottamatta) muodostavat aritmeettisen jonon.

- Jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 30$
- Jonon differenssi $d = 6$
- Jonon yleinen jäsen $a_n = 30 + (n-1) \cdot 6 = 6n + 24$

Merkitään viimeistä edellisellä rivillä olevien paikkojen lukumäärää yleisen jäsenen $6n + 24$ avulla.

Kun lasketaan yhteen riveillä olevat paikat, summa voi olla korkeintaan 800. Muodostetaan yhtälö $S_n = 800$ ja ratkaistaan siitä n.

Tilanteen voi ratkaista myös epäyhtälön avulla.
$S_n \leq 800$

$$n \cdot \frac{30 + (6n + 24)}{2} = 800$$

$s_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$ ja $a_n = 6n + 24$.

$$n = -21,43... \text{ tai } n = 12,43...$$

Rivien lukumäärä on positiivinen kokonaisluku.

- Jos $n = 12$, $S_{12} = 12 \cdot \frac{30 + (6 \cdot 12 + 24)}{2} = 756$.
- Jos $n = 13$, $S_{13} = 13 \cdot \frac{30 + (6 \cdot 13 + 24)}{2} = 858 > 800$.

Katsomon 12 ensimmäisellä rivillä on siis 756 paikkaa.

Katsomon viimeisellä eli 13. rivillä on $800 - 756 = 44$ paikkaa.

VASTAUS

Katsomossa on 13 riviä. Viimeisellä rivillä on 44 paikkaa.

Tehtävät

188. Aritmeettisen jonon kaksi ensimmäistä jäsentä ovat 2 ja 6.

a) Muodosta jonon yleisen jäsenen lauseke.

b) Mikä on jonon 20. jäsen?

c) Laske jonon 20 ensimmäisen jäsenen summa.

E1

189. **a)** Laske aritmeettisen jonon 3, 8, 13, … sadan ensimmäisen jäsenen summa.

b) Laske aritmeettinen summa $1 + 5 + 9 + \ldots + 797$.

190. Laske.

a) $120 + 140 + 160 + \ldots + 300$ **b)** $-2 - 8 - 14 - \ldots - 236$

191. Aritmeettisen summan ensimmäinen yhteenlaskettava on 6 ja viimeinen yhteenlaskettava on 44.

a) Kuinka monta yhteenlaskettavaa summassa on, kun summan arvo on 500?

b) Muodosta kyseisen aritmeettisen jonon yleinen jäsen.

192. Tarkastellaan aritmeettista summaa $\sum_{n=1}^{20}(2n+5)$.

a) Mikä on summan ensimmäinen yhteenlaskettava?

b) Mikä on summan viimeinen yhteenlaskettava?

c) Kuinka monta yhteenlaskettavaa summassa on?

d) Laske summan arvo.

E2

193. Laske aritmeettinen summa.

a) $\sum_{n=1}^{10}(8n-2)$ **b)** $\sum_{n=6}^{35}(2n+4)$

194. Laske aritmeettinen summa.

a) $\sum_{n=2}^{14}(n+1)$ **b)** $\sum_{n=4}^{28}(2-2n)$

195. Aritmeettisen jonon kaksi ensimmäistä jäsentä ovat 45 ja 92.

a) Muodosta aritmeettisen jonon yleinen jäsen a_n.

b) Jonon 500 ensimmäistä jäsentä lasketaan yhteen. Laske summan arvo.

c) Jonon jäsenet $a_{25} - a_{71}$ lasketaan yhteen. Laske summan arvo.

d) Laske $\sum_{n=12}^{103} a_n$.

196. Aritmeettiselle jonolle $a_3 = 15$ ja $a_9 = 69$. Laske jonon 450 ensimmäisen jäsenen summa.

E3

197. Tarkastellaan aritmeettista summaa $5 + 12 + 19 + \ldots$

a) Kuinka monta jonon jäsentä on laskettava yhteen, jotta summa juuri ja juuri ylittää arvon 200 000?

b) Aritmeettisen jonon summat S_1, S_2, … muodostavat lukujonon. Piirrä tämän lukujonon kuvaaja niin, että kuvaajassa näkyy jonon kymmenen ensimmäistä jäsentä.

198. Aritmeettisen jonon kaksi ensimmäistä jäsentä ovat -32 ja -14.

a) Kuinka monta lukujonon jäsentä voidaan korkeintaan laskea yhteen, jotta summa on vielä alle 300 000?

b) Aritmeettisen jonon summat S_1, S_2, … muodostavat lukujonon. Piirrä tämän lukujonon kuvaaja niin, että kuvaajassa näkyy jonon kuusi ensimmäistä jäsentä.

199. Aritmeettiselle jonolle $a_1 = \frac{3}{4}$ ja $a_5 = \frac{41}{12}$.

a) Kuinka monta jonon jäsentä voidaan laskea yhteen, jotta summa on vielä alle 700?

b) Mikä on tällöin viimeinen yhteenlaskettava?

200. Aritmeettisen jonon ensimmäinen jäsen on 240. Kolmen ensimmäisen jäsenen summa on 906. Kuinka monta jonon jäsentä on vähintään laskettava yhteen, jotta summa ylittää arvon 15 000?

E4

201. Kartanon puutarhuri istuttaa puutarhaan kukantaimia peräkkäisille riveille niin, että puutarhaan muodostuu kolmion muotoinen kukkaistutus. Puutarhuri istuttaa ensimmäiselle riville yhden kukantaimen, toiselle riville kolme tainta ja seuraaville riveille aina kaksi kukantainta edellistä riviä enemmän. Puutarhurilla on käytössään 430 kukantainta istutuksen tekemiseen.

a) Kuinka moneen riviin kukantaimet riittävät?

b) Kuinka monta kukantainta jää käyttämättä?

202. Amanda laittaa tammikuussa säästöön 10 €. Helmikuussa hän laittaa säästöön 15 € ja maaliskuussa 20 €. Hän jatkaa kuukausittaisten säästöjen tekemistä samalla tavalla. Amanda aikoo ostaa säästöillään uuden kannettavan tietokoneen. Tietokoneen hinta on 640 €.

a) Kuinka monta kuukautta Amandan pitää säästää rahaa, jotta hän voi ostaa haluamansa tietokoneen?

b) Kuinka paljon Amandan säästöistä jää käyttämättä?

203. Lääkäri määrää Eemelille lääkekuurin. Lääkettä otetaan ensimmäisenä päivänä 145 mg. Lääkeannosta tulee pienentää joka päivä 5 mg, kunnes lääke on syöty loppuun.

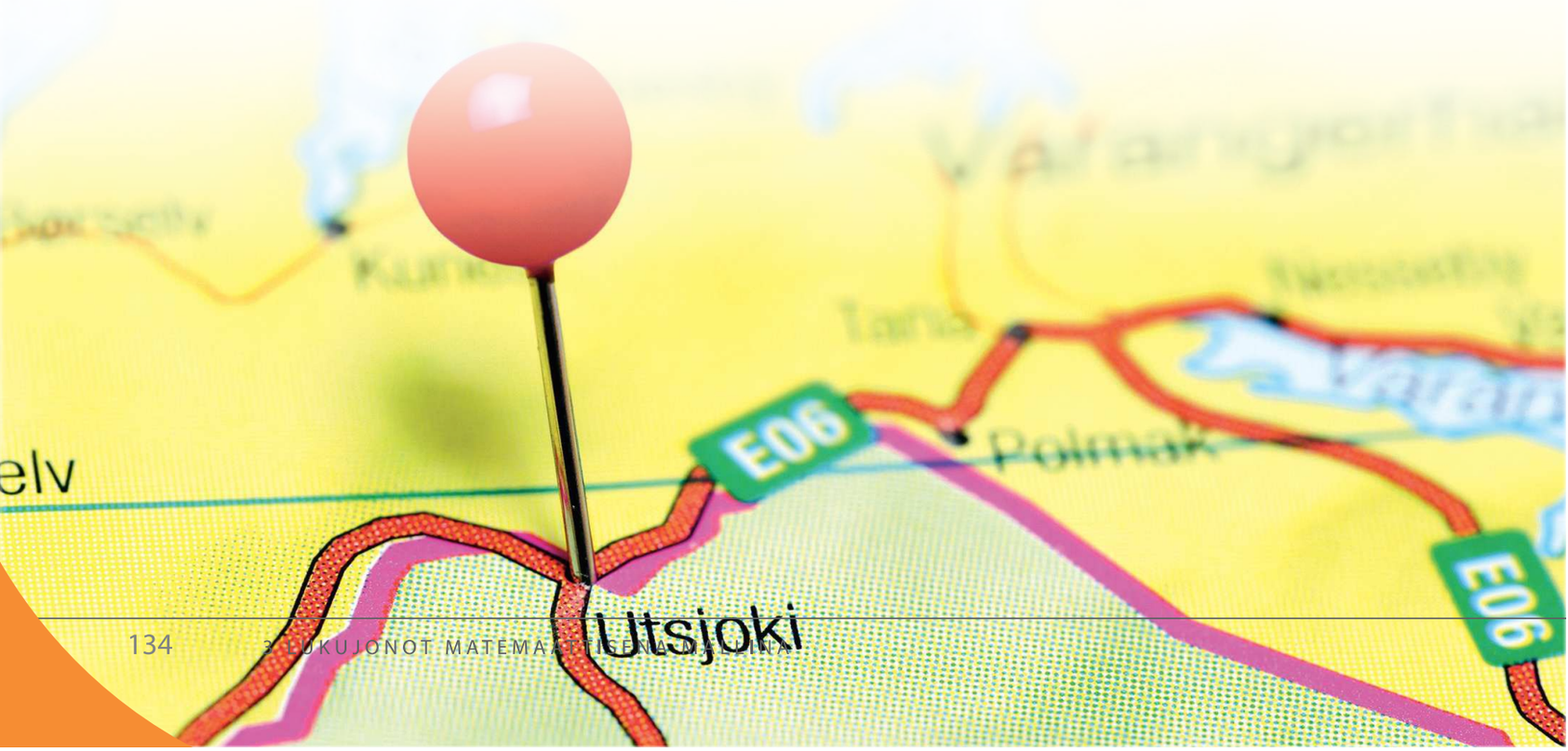
a) Kuinka monta päivää Eemelin lääkekuuri kestää?

b) Kuinka paljon lääkettä Eemeli syö kuurin aikana yhteensä?

204. Topias päätti pyöräillä Hangosta Utsjoelle. Ensimmäisellä viikolla Topias pyöräili 65 km. Hän kasvatti matkaa 5,0 kilometriä joka viikko.

a) Kuinka monta viikkoa Topias pyöräili Hangosta Utsjoelle? Hangon ja Utsjoen välinen etäisyys on 1157 km.

b) Kuinka pitkän matkan Topias pyöräili viimeisellä viikolla?



Sekalaisia

205. Laske aritmeettinen summa.

a) $\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}+\cdots+6$ **b)** $\sum_{n=4}^{13}(2n+3)$

206. Tarkastellaan aritmeettista jonoa 42, 38, 34, …

a) Laske jonon sadan ensimmäisen jäsenen summa.

b) Laske jonon kaikkien positiivisten jäsenten summa.

---

207. Olkoon aritmeettisen jonon yleinen jäsen $a_n = 20n - 15$.

a) Kuinka monta jäsentä jonon alusta on laskettava yhteen, jotta summa ylittää arvon 100 000?

b) Mikä on tällöin viimeinen yhteenlaskettava?

c) Muodosta lauseke summalle, kun yhteenlaskettavia on n kappaletta.

d) Summat muodostavat lukujonon. Piirrä tämän lukujonon kuvaaja niin, että kuvaajassa näkyy jonon kahdeksan ensimmäistä jäsentä.

208. Kaarlolla on luettavanaan kirja, jossa on 452 sivua. Hän päättää lukea kirjaa vähän joka päivä. Ensimmäisenä päivänä Kaarlo lukee 15 sivua. Toisena päivänä hän lukee 19 sivua. Kaarlo jatkaa lukemista niin, että hän lukee seuraavina päivinä aina 4 sivua edellistä päivää enemmän.

a) Kuinka monen päivän kuluttua Kaarlo on lukenut koko kirjan?

b) Kuinka monta sivua Kaarlo lukee viimeisenä päivänä?

209. Ylöspäin kapenevien sisustustikapuiden askelmat lyhenevät yhtä monta senttimetriä jokaisella askelmalla ylöspäin mentäessä. Viidennen askelman leveys on 53 cm ja yhdeksännen askelman leveys 41 cm. Askelmien valmistamiseen on käytetty 6,11 m lautaa. Kuinka monta askelmaa tikapuissa on?

3.3 Geometrinen summa

Pohdinta

Jenni päättää vuoden alussa aloittaa harjoittelun Helsingin maratonia varten. Hän aloittaa juoksemalla ensimmäisen viikon aikana 8,0 km. Jenni päättää pidentää viikon aikana juoksemaansa matkaa 10,0 % joka viikko. Jennin eri viikkoina juoksemat matkat muodostavat geometrisen jonon.

a) Kuinka pitkän matkan Jenni juoksi kuudennella viikolla?

b) Laske summakaavan avulla, kuinka paljon Jenni oli juossut yhteensä kuuden ensimmäisen viikon aikana?

c) Kuinka monennella viikolla Jennin viikon aikana juoksema matka ylittää maratonin pituuden 42,195 km?

d) Kuinka monennella viikolla Jennin juoksemien matkojen yhteispituus ylittää maratonin pituuden?

e) Jenni arvioi, että hän pystyy juoksemaan viikon aikana korkeintaan 60 km. Kuinka monta viikkoa Jenni voi nostaa juoksumatkojen pituuksia 10,0 prosentilla?

Tarkastellaan lukujonoa 3, 6, 12, … Lukujono on geometrinen, koska peräkkäisten jäsenten suhde on vakio.

$$\left.\begin{aligned}\frac{6}{3} &= 2\\ \frac{12}{6} &= 2\end{aligned}\right\} \text{ suhdeluku } q = 2$$

Kun äärellinen määrä geometrisen jonon peräkkäisiä jäseniä lasketaan yhteen, muodostuu **geometrinen summa**. Geometrisen summan arvo voidaan laskea, kun tunnetaan ensimmäinen yhteenlaskettava, suhdeluku sekä yhteenlaskettavien määrä.

$$\underbrace{3+6+12+24+48+96+192}_{7 \text{ yhteenlaskettavaa}} = 3 \cdot \frac{1-2^7}{1-2} = 381$$

suhdeluku 2

Geometrinen summa

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

Geometrinen summa

Kun geometrisen jonon a_1, a_2, a_3, … peräkkäisiä jäseniä lasketaan yhteen, muodostuu geometrinen summa.

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

- n on yhteenlaskettavien lukumäärä.
- a_1 on ensimmäinen yhteenlaskettava.
- q on suhdeluku.

Summa voidaan merkitä myös summamerkin $\sum$ avulla. Tällöin tarvitaan ensimmäisen ja viimeisen yhteenlaskettavan järjestysnumerot sekä yleisen jäsenen lauseke.

$$3+6+12+24+48+96+192 = \sum_{n=1}^{7} (3 \cdot 2^{n-1})$$

$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

Ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 3$.

Viimeinen yhteenlaskettava $a_7 = 192$

ESIMERKKI 1

a) Laske geometrisen jonon $-1, 3, -9, \ldots$ kahdenkymmenen ensimmäisen jäsenen summa.

b) Laske geometrinen summa $\sum_{n=7}^{23} (5 \cdot 2^{n-1})$.

Anna vastaus tarkkana arvona sekä kymmenpotenssimuodossa kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.

RATKAISU

a) Summan laskemiseen tarvitaan

- ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = -1$
- suhdeluku $q = \frac{3}{-1} = -3$
- yhteenlaskettavien määrä $n = 20$.

Lasketaan summan arvo summakaavalla.

$$S_{20} = -1 \cdot \frac{1-(-3)^{20}}{1-(-3)} = 871\,696\,100 \approx 8{,}72 \cdot 10^8$$

$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$

Muuta kymmenpotenssimuotoon laskimella esim. ottamalla luvusta likiarvo.

b) **Tapa 1**

Syötetään summa laskimeen summamerkin avulla.

$$\sum_{n=7}^{23} (5 \cdot 2^{n-1}) = 41\,942\,720 \approx 4{,}19 \cdot 10^7$$

Tapa 2

Lasketaan summa summakaavalla. Summan laskemiseen tarvitaan

- ensimmäinen yhteenlaskettava $a_7 = 5 \cdot 2^{7-1} = 320$
- suhdeluku $q = 2$
- yhteenlaskettavien määrä $n = 23 - 6 = 17$.

Lasketaan summan arvo summakaavalla.

$$S_{17} = 320 \cdot \frac{1-2^{17}}{1-2} = 41\,942\,720 \approx 4{,}19 \cdot 10^7$$

VASTAUS **a)** $871\,696\,100 \approx 8{,}72 \cdot 10^8$ **b)** $41\,942\,720 \approx 4{,}19 \cdot 10^7$

ESIMERKKI 2

Geometrisen jonon ensimmäinen jäsen on $\frac{1}{2}$. Jonon yhdeksän ensimmäistä jäsentä lasketaan yhteen. Laske summan arvo, kun $a_9 = \frac{6561}{131\,072}$.

RATKAISU

Summan laskemiseen tarvitaan

- ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = \frac{1}{2}$
- suhdeluku q
- yhteenlaskettavien määrä $n = 9$.

Ratkaistaan jonon yhdeksännen jäsenen avulla suhdeluku. Muodostetaan ensin geometrisen jonon yleinen jäsen.

$a_n = a_1 q^{n-1}$ → $a_n = \frac{1}{2} \cdot q^{n-1}$

Muodostetaan yleisen jäsenen avulla yhtälö ja ratkaistaan q.

$$a_9 = \frac{6561}{131\,072}$$

$$\frac{1}{2} \cdot q^{9-1} = \frac{6561}{131\,072}$$

$$q = -\frac{3}{4} \quad \text{tai} \quad q = \frac{3}{4}$$

Kahdelle erilaiselle geometriselle jonolle $a_9 = \frac{6561}{131\,072}$. Lasketaan kummassakin tapauksessa summan arvo.

$q = -\frac{3}{4}$

$$S_9 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(-\frac{3}{4}\right)^9}{1 - \left(-\frac{3}{4}\right)} = \frac{40\,261}{131\,072}$$

$q = \frac{3}{4}$

$$S_9 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^9}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{242\,461}{131\,072}$$

VASTAUS

$S_9 = \frac{40\,261}{131\,072}$ tai $S_9 = \frac{242\,461}{131\,072}$

ESIMERKKI 3

Tarkastellaan geometrista summaa $2+6+18+\cdots$.

a) Kuinka monta jäsentä jonon alusta alkaen on laskettava yhteen, jotta summa on vähintään 10^9?

b) Geometrisen jonon summat S_1, S_2, … muodostavat lukujonon. Piirrä tämän lukujonon kuvaaja niin, että kuvaajassa näkyy jonon kahdeksan ensimmäistä jäsentä.

RATKAISU

a) Summan laskemiseen tarvitaan

- jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 2$
- suhdeluku $q = \frac{6}{2} = 3$
- yhteenlaskettavien lukumäärä n.

Muodostetaan lauseke summalle, kun lasketaan yhteen n kappaletta jonon jäseniä.

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = 2 \cdot \frac{1-3^n}{1-3} = 3^n - 1$$

Sievennä lauseke laskimen avulla.

Ratkaistaan epäyhtälö $S_n \geq 10^9$.

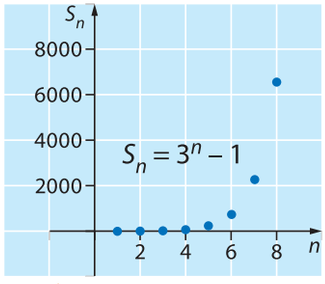
$$3^n - 1 \geq 10^9$$

$$n \geq 18{,}863...$$

Järjestysnumero n on positiivinen kokonaisluku. Pienin positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa epäyhtälön, on 19. Tarvitaan siis vähintään 19 jäsentä.

b) Summista muodostuvan lukujonon yleinen jäsen on $S_n = 3^n - 1$.

Piirretään kuvaaja tämän lukujonon kahdeksasta ensimmäisestä jäsenestä.



Muuta kuvaajanäkymässä koordinaattiakselien asteikkoja niin, että saat halutut jäsenet näkyviin.

VASTAUS

a) 19 jäsentä

Alennusmyyntiaikana vaateliikkeen myyntitulot nousivat 3,5 % joka viikko. Liikkeen alennusmyyntikausi kesti seitsemän viikkoa.

a) Kuinka suuret olivat alennusmyyntikauden myyntitulot, jos ensimmäisen viikon myyntitulo oli 61 000 €?

b) Kuinka suuri olisi ensimmäisen viikon myyntitulon oltava, jotta koko kauden aikana myyntitulot olisivat 500 000 €?

RATKAISU

a) Eri viikkojen myyntitulot muodostavat geometrisen jonon.

- Jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 61\,000$ €
- Jonon suhdeluku $q = 1{,}035$

Alennusmyyntikauden myyntitulot saadaan, kun lasketaan geometrisen jonon seitsemän ensimmäisen jäsenen summa.

$$S_7 = 61\,000 \cdot \frac{1-1{,}035^7}{1-1{,}035} = 474\,543{,}85... \approx 470\,000\ (€)$$

Alennusmyyntikauden myyntitulot olivat 470 000 €.

b) Jonon seitsemän ensimmäisen jäsenen summan tulisi olla 500 000 €.

Ensimmäisen viikon myyntitulo on a_1. Muodostetaan summan avulla yhtälö ja ratkaistaan siitä a_1.

$$S_7 = 500\,000$$

$$a_1 \cdot \frac{1-1{,}035^7}{1-1{,}035} = 500\,000$$

$$a_1 = 64\,272{,}246... \approx 64\,000$$

Ensimmäisen viikon myyntitulon olisi siis oltava 64 000 €.

VASTAUS **a)** 470 000 € **b)** 64 000 €

Tehtävät

210. Geometrisen jonon yleinen jäsen on $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$.

a) Laske jonon kymmenes jäsen.

b) Laske jonon kymmenen ensimmäisen jäsenen summa.

E1

211. **a)** Laske geometrisen jonon $-2, 8, -32, \ldots$ kahdentoista ensimmäisen jäsenen summa.

b) Laske geometrinen summa $\sum_{n=6}^{15} (7 \cdot 3^{n-1})$.

Anna vastaus tarkkana arvona sekä kymmenpotenssimuodossa kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.

212. Geometrisen jonon kaksi ensimmäistä jäsentä ovat $a_1 = \frac{2}{3}$ ja $a_2 = \frac{4}{3}$.

a) Laske jonon kymmenen ensimmäisen jäsenen summa.

b) Laske summa $a_5 + a_6 + \ldots + a_{14}$.

E2

213. Geometrisen jonon ensimmäinen jäsen on -5. Jonon kolmetoista ensimmäistä jäsentä lasketaan yhteen. Laske summan arvo, kun $a_{13} = -20\,480$.

214. Geometrisen summan kaksi ensimmäistä yhteenlaskettavaa ovat -2 ja -3. Summan viimeinen yhteenlaskettava on $-\frac{19\,683}{256}$.

a) Kuinka monta yhteenlaskettavaa summassa on?

b) Laske summan arvo.

215. Laske.

a) $8 + 4 + 2 + \cdots + \frac{1}{128}$

b) $-7 - 21 - 63 - \cdots - 5103$

216. Kun geometrisen jonon kymmenen ensimmäistä jäsentä lasketaan yhteen, saadaan summan arvoksi 5115.

a) Mikä on ensimmäinen yhteenlaskettava, kun geometrisen jonon suhdeluku on 2.

b) Mikä on viimeinen yhteenlaskettava?

217. Päättyvästä geometrisesta jonosta $6, 3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{3}{8192}$ muodostetaan kaksi summaa. Ensimmäinen summa muodostetaan laskemalla yhteen ne jonon jäsenet, joiden järjestysluku on parillinen. Toinen summa muodostuu niistä jäsenistä, joiden järjestysluku on pariton.

a) Kummassa summassa on enemmän yhteenlaskettavia?

b) Kumman summan arvo on suurempi?

E3 **218.** Tarkastellaan geometrista summaa $2 + 10 + 50 + \ldots$.

a) Kuinka monta jäsentä jonon alusta alkaen on laskettava yhteen, jotta summa on vähintään 10^{12}?

b) Geometrisen jonon summat S_1, S_2, … muodostavat lukujonon. Piirrä tämän lukujonon kuvaaja niin, että kuvaajassa näkyy jonon kuusi ensimmäistä jäsentä.

219. Tarkastellaan geometrista summaa $80 + 64 + \frac{246}{5} + \cdots$.

a) Kuinka monta lukua summassa voi korkeintaan olla, jotta summan arvo on vielä pienempi kuin 350?

b) Geometrisen jonon summat S_1, S_2, … muodostavat lukujonon. Piirrä tämän lukujonon kuvaaja niin, että kuvaajassa näkyy jonon kuusi ensimmäistä jäsentä.

220. Geometrisen jonon suhdeluku on $q = \frac{3}{5}$. Kun jonon kuusi ensimmäistä jäsentä lasketaan yhteen, saadaan summan arvoksi $\frac{14\,896}{625}$.

a) Mikä on jonon ensimmäinen jäsen?

b) Kuinka monta lukua voidaan jonon alusta korkeintaan laskea yhteen, jotta summan arvo on vielä pienempi kuin 20?

c) Geometrisen jonon summat S_1, S_2, … muodostavat lukujonon. Piirrä tämän lukujonon kuvaaja ja tutki kuvaajan avulla, mitä lukua summan arvot näyttäisivät lähestyvän.

E4 **221.** Artturi kutoo lahjaksi kaulahuivia. Hän kutoo joka päivä kahden viikon ajan. Ensimmäisenä päivänä Artturi kutoo 20 minuuttia. Seuraavina päivinä hän kutoo 10 % pidemmän ajan kuin edellisenä päivänä.

a) Kuinka paljon Artturi käyttää aikaa kaulahuivin kutomiseen kahden viikon aikana? Anna vastaus minuutteina ja tunteina minuutin tarkkuudella.

b) Artturin pikkusisko Inka arvioi, että hän kutoisi huivin 18 tunnissa. Kuinka monta minuuttia Inkan pitäisi ensimmäisenä päivänä kutoa, jos hän pidentäisi aikaa joka päivä 10 % kuten Artturi.

222. Tilille talletetaan 850,00 € jokaisen vuoden alussa. Talletus kasvaa vuoden aikana korkoa 1,9 %. Korko lisätään vuoden lopussa tilillä olevaan pääomaan.

a) Täydennä taulukko.

Talletuskerta	Tilillä rahaa talletuksen tekemisen jälkeen (€)
1.	850 €
2.	
3.	

b) Kuinka paljon tilillä on rahaa 10. talletuksen jälkeen?

c) Kuinka monta talletusta tilille pitäisi tehdä, jotta tilillä oleva rahamäärä ylittäisi 13 000 €?

223. Samuel alkaa opiskella nettikurssilla espanjaa. Hän opiskelee ensimmäisellä viikolla yhteensä 1,5 tuntia. Samuel lisää opiskeluaikaa 5,0 % joka viikko.

a) 12 viikon kuluttua Samuelilla on kurssikoe. Kuinka paljon Samuel on ehtinyt opiskelemaan espanjaa ennen kurssikoetta? Anna vastaus tunteina ja minuutteina minuutin tarkkuudella.

b) Anna aloittaa Samuelin kanssa samaan aikaan ranskan opiskelun. Anna opiskelee ensimmäisenä päivänä 15 minuuttia ja kasvattaa opiskeluaikaansa 3,0 % joka päivä. Anna osallistuu 12 viikon kuluttua kurssikokeeseen. Kumpi on opiskellut tässä ajassa enemmän, Samuel ja Anna?

224. YK:n ilmastosopimusta täsmentävä Kioton pöytäkirja astui voimaan vuonna 2005. Se on ensimmäinen oikeudellisesti sitova sopimus, jonka avulla päästöjä vähennetään kansainvälisesti. Suomen kasvihuonekaasupäästöt olivat vuonna 2006 noin 80 miljoonaa tonnia hiilidioksidiekvivalenttia. Oletetaan, että Suomessa vähennetään kasvihuonekaasupäästöjä vuodesta 2007 alkaen aina 2,5 % joka vuosi.

a) Kioton pöytäkirjassa Suomen tavoitetaso kasvihuonepäästöille oli 71 miljoonaa tonnia hiilidioksidiekvivalenttia. Minä vuonna tähän tavoitteeseen päästään?

b) Kuinka paljon Suomi on tässä ajassa yhteensä vähentänyt kasvihuonepäästöjen määrää?

Sekalaisia

225. Laske geometrinen summa $3+6+12+\cdots+3072$.

226. Geometriselle jonolle $a_1=\frac{3}{5}$ ja $a_9=\frac{3}{327\,680}$. Laske summa S_9. Anna vastaus kahden desimaalin tarkkuudella.

227. Geometrisen jonon kaksi ensimmäistä jäsentä ovat $a_1=3$ ja $a_2=\frac{9}{2}$.

a) Kuinka monta jäsentä jonon alusta alkaen on laskettava yhteen, jotta summa ylittää arvon 10^{15}?

b) Geometrisen jonon summat S_1, S_2, … muodostavat lukujonon. Piirrä tämän lukujonon kuvaaja niin, että kuvaajassa näkyy jonon kuusi ensimmäistä jäsentä.

228. Elise pelaa nettipelejä 120 minuuttia joka päivä. Hän päättää uuden vuoden lupauksessaan vähentää pelaamiseen käyttämäänsä aikaa 2,5 % joka päivä.

a) Kuinka paljon Elise käyttää pelaamiseen aikaa vuoden ensimmäisen viikon aikana?

b) Kuinka paljon Elisellä jää viikon aikana aikaa muuhun, kun hän vähentää pelaamistaan?

c) Kuinka monen päivän kuluttua Elise on käyttänyt pelaamiseen aikaa yli 50 tuntia?

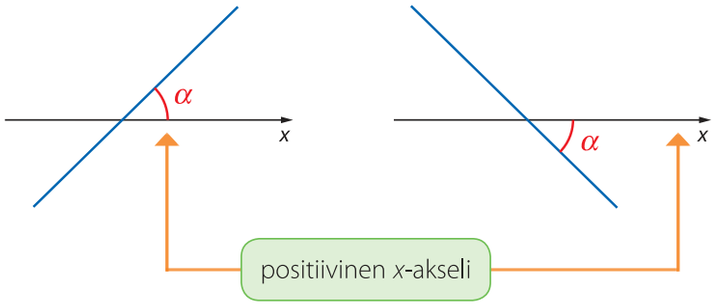
4 Lisämateriaali

4.1 Suuntakulma

Suoran kulmakerroin k kuvaa suoran kulkusuuntaa koordinaatistossa.

- Kun $k > 0$, suora on nouseva.
- Kun $k < 0$, suora on laskeva.
- Kun $k = 0$, suora on x-akselin suuntainen.

Suoran kulkusuuntaa voidaan kuvata myös **suuntakulman** α avulla. Suuntakulma on suoran ja positiivisen x-akselin väliin muodostuva kulma.



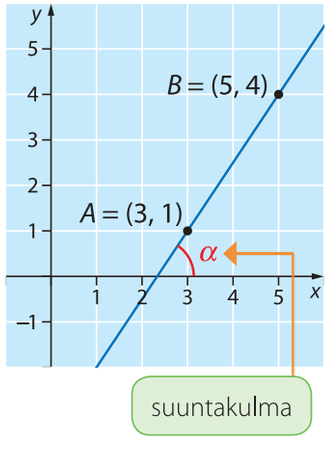
Nouseville suorille suuntakulma on positiivinen. Laskeville suorille suuntakulma on negatiivinen. Suoran suuntakulma voidaan laskea kulmakertoimen avulla.

Tarkastellaan suoraa, joka kulkee pisteiden $A(3, 1)$ ja $B(5, 4)$ kautta.

Suoran kulmakerroin on

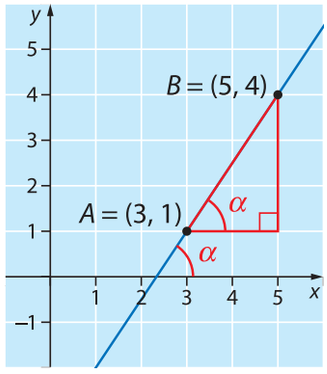
$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 1}{5 - 3} = \frac{3}{2}.$$

Merkitään suoran suuntakulmaa kirjaimella α.



Piirretään kuvaan suorakulmainen kolmio.

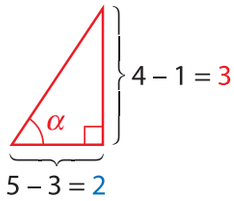
- Kolmion kateetit ovat koordinaattiakselien suuntaiset.
- Hypotenuusan päätepisteet ovat suoran pisteet A ja B.



Suorakulmaisen kolmion toinen kateetti on x-akselin suuntainen ja kolmion hypotenuusa on suoralla s. Suorakulmaisen kolmion toinen terävä kulma on samankohtaisena kulmana yhtä suuri kuin suuntakulma α.

Suorakulmaisesta kolmiosta voidaan ratkaista terävän kulman α suuruus, kun kaksi kolmion sivua tunnetaan.

Suorakulmaisen kolmion
- vaakasuoran kateetin pituus on $5 - 3 = \mathbf{2}$
- pystysuoran kateetin pituus on $4 - 1 = \mathbf{3}$.



Kulman suuruus voidaan laskea tangentin avulla.

$$\tan\alpha = \frac{3}{2}$$
$$\alpha = 56{,}309...^\circ$$
$$\alpha \approx 56^\circ$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{vastaisen kateetin pituus}}{\text{viereisen kateetin pituus}}$$

Kolmion vaakasuoran ja pystysuoran kateetin pituuksien avulla lasketaan toisaalta myös tarkasteltavan suoran kulmakerroin.

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-1}{5-3} = \frac{3}{2}$$

$$\tan\alpha = k$$

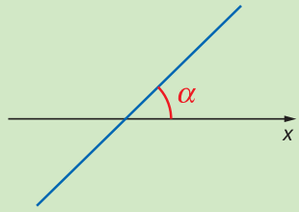
Suuntakulma voidaan siis laskea suoraan kulmakertoimen avulla.

Suuntakulma

Suoran suuntakulma on suoran ja positiivisen x-akselin väliin jäävä terävä kulma.

Suuntakulma voidaan ratkaista tangentin ja suoran kulmakertoimen k avulla.

$$\tan\alpha = k$$



ESIMERKKI 1

Laske suoran suuntakulma asteen tarkkuudella, kun

a) suora kulkee pisteiden $A(-1, 2)$ ja $B(1, 7)$ kautta

b) suoran yhtälö on $y = -4x + 3$

c) suoran yhtälö on $2x - 6y + 4 = 0$.

RATKAISU

a) Lasketaan ensin suoran kulmakerroin.

$$k = \frac{7-2}{1-(-1)} = \frac{5}{2}$$

Ratkaistaan suuntakulma α tangentin avulla.

$$\tan\alpha = \frac{5}{2}$$

$$\alpha = 68{,}19...° \approx 68°$$

b) Suoran kulmakerroin $k = -4$. Ratkaistaan suuntakulma α tangentin avulla.

$$\tan\alpha = -4$$

$$\alpha = -75{,}96...° \approx -76°$$

← Laskevan suoran kulmakerroin ja suuntakulma ovat negatiiviset.

c) Kirjoitetaan suoran yhtälö ensin ratkaistussa muodossa.

$$2x - 6y + 4 = 0$$

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

← Suoran kulmakerroin nähdään ratkaistusta muodosta.

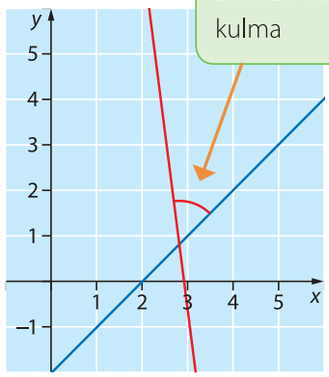
Suoran kulmakerroin on $k = \frac{1}{3}$. Ratkaistaan suuntakulma α tangentin avulla.

$$\tan\alpha = \frac{1}{3}$$

$$\alpha = 18{,}43...° \approx 18°$$

VASTAUS **a)** 68° **b)** −76° **c)** 18°

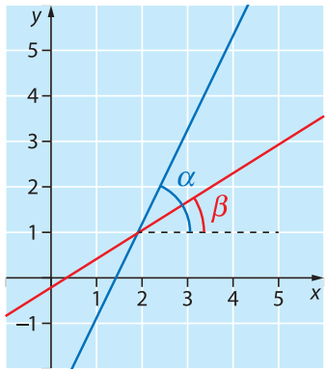
Suorien leikkauspisteeseen muodostuu aina neljän kulman ryhmä. Leikkauspisteessä vastakkain olevat kulmat ovat ristikulmina yhtä suuret. Leikkauspisteessä vierekkäin olevat kulmat ovat vieruskulmia, joiden summa on 180°.



On sovittu, että suorien väliseksi kulmaksi kutsutaan pienintä kulmaa, joka suorien leikkauspisteeseen syntyy. Näin ollen kulma on aina positiivinen ja se voi olla korkeintaan 90°.

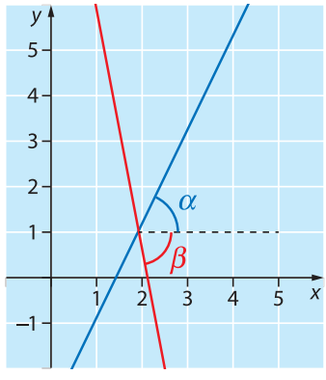
Suuntakulmien avulla voidaan laskea suorien välisten kulmien suuruuksia.

Molemmat suorat nousevia/laskevia



1. Laske suorien suuntakulmat (α ja β).
2. Vähennä suuremmasta suuntakulmasta pienempi.
   $\alpha - \beta$

Toinen suora on nouseva ja toinen laskeva



1. Laske suorien suuntakulmat (α ja β).
2. Vähennä positiivisesta suuntakulmasta negatiivinen.
   $\alpha - \beta$
3. Jos kulma $\alpha - \beta$ on yli 90°, laske vieruskulman suuruus.

Suorien välisen kulman suuruus on aina positiivinen ja se voi olla korkeintaan 90°.

ESIMERKKI 2

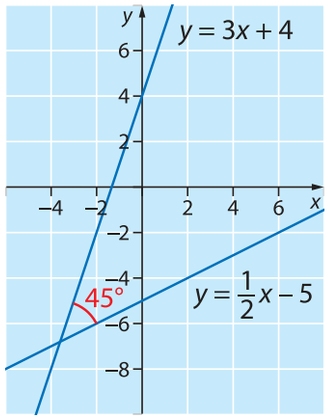
Laske suorien s ja t välisen kulman suuruus asteen tarkkuudella.

a) $s\colon\ y = 3x + 4$ ja $t\colon\ y = \frac{1}{2}x - 5$

b) $s\colon\ y = \frac{3}{4}x - 1$ ja $t\colon\ y = -2x + 8$

RATKAISU

a) Lasketaan ensin suorien suuntakulmat.



- Suoran s kulmakerroin $k_s = 3$.

$$\tan\alpha = 3$$
$$\alpha = 71{,}56...^\circ$$

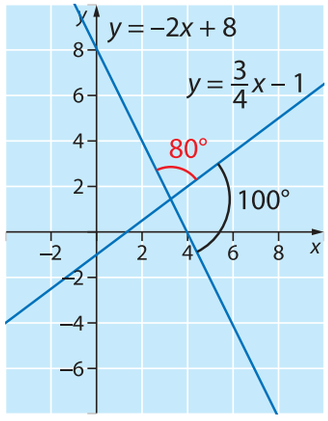
- Suoran t kulmakerroin $k_t = \frac{1}{2}$.

$$\tan\beta = \frac{1}{2}$$
$$\beta = 26{,}56...^\circ$$

Molemmat suorat ovat nousevia. Lasketaan suorien välinen kulma vähentämällä suuremmasta kulmasta pienempi.

$$\alpha - \beta = 71{,}56...^\circ - 26{,}56...^\circ = 45^\circ$$

b) Lasketaan ensin suorien suuntakulmat.



- Suoran s kulmakerroin $k_s = \frac{3}{4}$.

$$\tan\alpha = \frac{3}{4}$$
$$\alpha = 36{,}86...^\circ$$

- Suoran t kulmakerroin $k_t = -2$

$$\tan\beta = -2$$
$$\beta = -63{,}43...^\circ$$

Toinen suora on nouseva ja toinen laskeva. Vähennetään positiivisesta kulmasta negatiivinen kulma.

$$\alpha - \beta = 36{,}86...^\circ - (-63{,}43...^\circ) = 100{,}30...^\circ$$

Suorien välisen kulman on oltava alle 90°. Lasketaan siis vieruskulman suuruus.

$$180^\circ - 100{,}30\ldots^\circ = 79{,}69\ldots^\circ \approx 80^\circ$$

VASTAUS **a)** 45° **b)** 80°

Tehtävät

E1

229. Laske suoran suuntakulma asteen tarkkuudella, kun

a) suora kulkee pisteiden $A(-2, 3)$ ja $B(3, 4)$ kautta

b) suoran yhtälö on $y = -6x + 2$

c) suoran yhtälö on $3x - 5y + 10 = 0$.

230. Laske suoran suuntakulma asteen tarkkuudella.

a) $y = \frac{1}{7}x + 1$

b) $y = 3 - x$

c) $3x + 2y - 8 = 0$

231. Laske suoran suuntakulma asteen tarkkuudella, kun suora kulkee pisteiden A ja B kautta.

a) $A(5, -2)$ ja $B(-3, 9)$

b) $A(-6, 1)$ ja $B(-2, 2)$

E2

232. Laske suorien s ja t välisen kulman suuruus asteen tarkkuudella.

a) s: $y = \frac{2}{7}x + 4$ ja t: $y = \frac{4}{5}x - 5$

b) s: $y = -\frac{1}{6}x - 1$ ja t: $y = -5x + 8$

c) s: $y = 3 - 4x$ ja t: $y = \frac{5}{6}x - 2$

233. Suora s kulkee pisteiden $(3, 5)$ ja $(6, 9)$ kautta. Suora t kulkee pisteiden $(-5, -6)$ ja $(-1, 7)$ kautta. Laske suorien välisen kulman suuruus asteen kymmenesosan tarkkuudella.

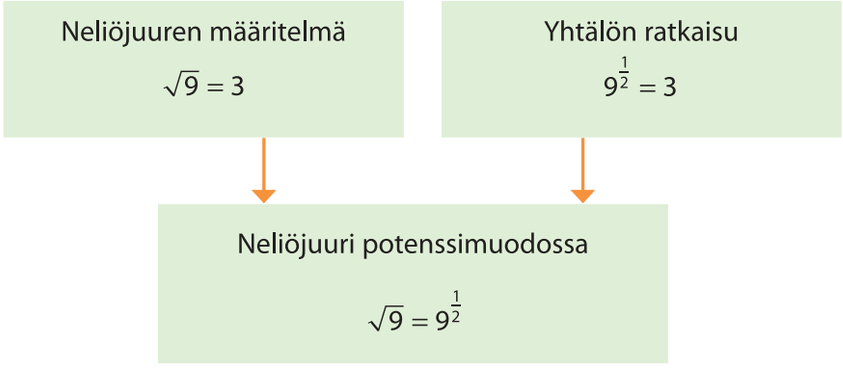
4.2 Murtopotenssi

Laskinohjelmat käyttävät juurilausekkeiden sijaan usein potenssimerkintää, jossa eksponenttina on murtoluku. Tällaista merkintää kutsutaan **murtopotenssiksi**. Tutkitaan murtopotenssia ensin neliöjuuren avulla.

Neliöjuuren määritelmän mukaan $\sqrt{9} = 3$, koska $3^2 = 9$.

Jos neliöjuuri voitaisiin korvata jollain potenssilla, niin tällöin olisi voimassa ehto $9^x = 3$. Ratkaistaan yhtälöstä eksponentti x.

$$\begin{aligned} 9^x &= 3 \\ (3^2)^x &= 3 \\ 3^{2x} &= 3^1 \\ 2x &= 1 \qquad \vert : 2 \\ x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$



Tämä sama on yleistettävissä muillekin juurille kuin neliöjuurille.

Juurimuoto	Murtopotenssimuoto
$\sqrt{5}$	$5^{\frac{1}{2}}$
$\sqrt[3]{5}$	$5^{\frac{1}{3}}$
$\sqrt[4]{5}$	$5^{\frac{1}{4}}$
$\sqrt[n]{5}$	$5^{\frac{1}{n}}$

Monissa tilanteissa juuren alla oleva juurrettava voidaan kirjoittaa potenssimuodossa. Tällöin juurilauseke saadaan sievennettyä potenssien laskusääntöjen avulla.

$\sqrt[3]{25}$

$= 25^{\frac{1}{3}}$ ← Kirjoitetaan ensin juuri murtopotenssimuodossa.

$= (5^2)^{\frac{1}{3}}$ ← Kirjoitetaan 25 muodossa 5^2.

$= 5^{2 \cdot \frac{1}{3}}$ ← Potenssien laskusääntö: $(a^n)^m = a^{(nm)}$

$= 5^{\frac{2}{3}}$

Murtopotenssi

Juuret voidaan kirjoittaa potenssimuodossa murtopotenssin avulla.

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

($a > 0$, n positiivinen kokonaisluku, m kokonaisluku)

ESIMERKKI 1

Kirjoita murtopotenssina mahdollisimman pienen kantaluvun avulla.

a) $\sqrt[3]{49}$ **b)** $2 \cdot \sqrt[4]{8}$

RATKAISU

a) $\sqrt[3]{49} = \sqrt[3]{7^2} = 7^{\frac{2}{3}}$

b) $2 \cdot \sqrt[4]{8} = 2 \cdot \sqrt[4]{2^3} = 2^1 \cdot 2^{\frac{3}{4}} = 2^{1+\frac{3}{4}} = 2^{1\frac{3}{4}}$

VASTAUS

a) $7^{\frac{2}{3}}$ **b)** $2^{1\frac{3}{4}}$

ESIMERKKI 2

Kirjoita juurimuodossa.

a) $3^{\frac{3}{4}}$ **b)** $2^{\frac{4}{5}}$

RATKAISU

a) $3^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{3^3} = \sqrt[4]{27}$ **b)** $2^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{2^4} = \sqrt[5]{16}$

VASTAUS

a) $\sqrt[4]{27}$ **b)** $\sqrt[5]{16}$

Tehtävät

234. Kirjoita murtopotenssina.

a) $\sqrt[3]{7}$ b) $\sqrt[4]{5^3}$ c) $\sqrt[5]{2^4}$

E1

235. Kirjoita murtopotenssina mahdollisimman pienen kantaluvun avulla.

a) $\sqrt[5]{100}$ b) $\sqrt[4]{9}$ c) $3 \cdot \sqrt[5]{27}$

236. Kirjoita murtopotenssina mahdollisimman pienen kantaluvun avulla.

a) $5 \cdot \sqrt{25}$ b) $3^4 \cdot \sqrt[3]{9}$ c) $4 \cdot \sqrt[4]{8}$

E2

237. Kirjoita juurimuodossa.

a) $2^{\frac{2}{7}}$ b) $5^{\frac{3}{4}}$ c) $7^{\frac{2}{9}}$

238. Täydennä taulukko.

Juurimuoto	Murtopotenssi
$\sqrt[5]{3}$	
	$4^{\frac{2}{9}}$
$2 \cdot \sqrt[5]{16}$	
	$5^{\frac{3}{7}}$
$7^3 \cdot \sqrt[3]{49}$	

4.3 Briggsin logaritmi

Eksponenttiyhtälön ratkaisu voidaan esittää aina logaritmin avulla. Tällöin eksponenttiyhtälössä esiintyvän potenssin kantaluku on sama kuin logaritmin kantaluku.

$$a^x = b \qquad 3^x = 5$$
$$x = \log_a b \qquad x = \log_3 5$$

Osa logaritmeista on nimetty erikseen. Luvussa 2.2 (Eksponenttiyhtälön ratkaiseminen) on esitelty logaritmi, jonka kantalukuna on Neperin luku e. Tätä logaritmia kutsutaan luonnolliseksi logaritmiksi.

$$e^x = 5$$
$$x = \log_e 5$$
$$x = \ln 5$$

luonnollinen logaritmi (ln)

Jos logaritmin kantalukuna on luku 10, logaritmia kutsutaan **Briggsin logaritmiksi**. Tämä logaritmi on nimetty englantilaisen matemaatikon Henrik Briggsin (1561–1630) mukaan. Briggsin logaritmia lyhennetään usein merkinnällä lg.

$$10^x = 5$$
$$x = \log_{10} 5$$
$$x = \lg 5$$

Briggsin logaritmi (lg)

Ennen laskinten yleistymistä logaritmilaskuja laskettiin taulukoiden avulla. Taulukoihin oli koottu nimenomaan Briggsin logaritmien arvoja erilaisille kokonaisluvuille. Tästä syystä Briggsin logaritmeilla on ollut suuri merkitys laskutoimitusten suorittamisessa.

Laskutoimitusten lisäksi logaritmeja käytetään apuna erilaisten suureiden tarkastelussa. Tällaisia suureita ovat esimerkiksi äänenvoimakkuus, maanjäristyksen voimakkuus ja liuoksen happamuusaste eli pH.

ESIMERKKI 1

Äänen intensiteettitaso L (dB) riippuu äänen intensiteetistä I kaavan

$$L = 10\lg\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

mukaisesti. Kaavassa I_0 on ihmisen kuuleman heikoimman äänen intensiteetti, $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2.

a) Laske äänen intensiteettitaso L, kun äänen intensiteetti on $I = 0{,}000\,065$ W/m^2.

b) Laske intensiteetti I, kun intensiteettitaso L on 114 dB.

RATKAISU

a) Lasketaan intensiteettitaso L sijoittamalla annetut arvot intensiteettitason lausekkeeseen.

- $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2
- $I = 0{,}000\,065$ W/m^2

Intensiteettitaso on $L = 10\lg\left(\frac{0{,}000\,065}{10^{-12}}\right) = 78{,}129... \approx 78$ (dB).

$\lg = \log_{10}$

b) Sijoitetaan intensiteettitason kaavaan annetut lukuarvot.

- $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2
- $L = 114$ dB

Ratkaistaan yhtälö laskimen Ratkaise-toiminnolla.

$$114 = 10\lg\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$$

$L = 10\lg\left(\frac{I}{I_0}\right)$

$$I = 0{,}2511...$$

$$I \approx 0{,}25 \quad (\text{W/m}^2)$$

VASTAUS

a) 78 dB **b)** 0,25 W/m^2

Tehtävät

E1

239. Korkeushyppääjän eri-ikäisenä saavuttamia tuloksia voidaan vertailla Seppo Sarnan laajasta tilastollisesta aineistosta kehittämän muunnoskaavan

$$T = t + k \lg \frac{a}{35}$$

avulla. Kaavassa t on hyppääjän saavuttama todellinen tulos a vuoden ikäisenä, T on muunnettu tulos ja k tilastomateriaaliin perustuva kerroin, jonka arvo on 201,4 cm. Korkeushypyssä tulokset ilmaistaan senttimetrin tarkkuudella.

a) Raimo hyppäsi 19-vuotiaana juniorina tuloksen 196 cm, 23-vuotiaana ennätyksensä 200 cm ja 40-vuotiaana veteraanina tuloksen 175 cm. Aseta nämä tulokset paremmuusjärjestykseen, kun niitä verrataan muunnoskaavan avulla.

b) Missä iässä hypätty tulos 175 cm on muunnettuna 233 cm? (233 oli sisäratojen miesten Suomen ennätys vuoden 2012 alussa.) [S2013, 12]

240. Liuoksen happamuus ilmoitetaan yleensä pH-arvona. Liuoksen happamuus voidaan määrittää vetyionikonsentraation avulla.

$$\mathrm{pH} = -\lg[\mathrm{H_3O^+}],$$

jossa $[\mathrm{H_3O^+}]$ on liuoksen vetyionikonsentraatio (mol/l). Jos liuoksen pH-arvo on alle 7, se on hapan. Jos liuoksen pH-arvo on yli 7, se on emäksinen.

a) Liuoksen oksoniumionikonsentraatio on 0,050 mol/l. Laske liuoksen pH. Onko liuos hapan vai emäksinen?

b) Liuoksen pH on 10,4. Laske liuoksen oksoniumionikonsentraatio.

241. Maanjäristyksen voimakkuus M lasketaan kaavalla

$$1,44M = \log_{10} E - 5,24,$$

jossa E on järistyksessä vapautuva energia.

a) Sendain lähellä vuonna 2011 sattuneen järistyksen voimakkuus oli 9,0. Laske järistyksessä vapautunut energia kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.

b) Kobessa vuonna 1995 sattuneen järistyksen voimakkuus oli 6,8. Kuinka moninkertainen oli Sendain järistyksessä vapautunut energia Koben järistykseen verrattuna?
[K2012, 10]

242. Vieraalla planeetalla putoavan kappaleen kulkema matka s on suoraan verrannollinen kuluneen ajan t toiseen potenssiin kaavan $s = 10t^2$ mukaisesti.

a) Kopioi oheinen taulukko vastauspaperiisi ja täydennä tyhjät kohdat.

t	lg t	lg s
1	0	1
2		
4		
10		
100		

b) Merkitse koordinaatistoon a-kohdan taulukosta pisteet, joiden koordinaatit ovat (lg t, lg s). Mitä havaitset? Selitä. [K2016, 12]

5 Kertaus: Matemaattisia malleja

Tässä luvussa kerrataan

- suoran yhtälö
- eksponenttifunktio ja eksponenttiyhtälö
- potenssiyhtälö
- aritmeettinen jono ja summa
- geometrinen jono ja summa

5.1 Kurssin keskeiset asiat

- Kerrataan kurssin keskeiset käsitteet ja laskukaavat.
- Kaikki luvun tehtävät on tarkoitus ratkaista **ilman laskinta**.

5.2 Matemaattisia malleja

- Kerrataan matemaattisen mallin muodostamista ja mallin käyttöä erilaisissa tilanteissa.
- Kerrataan laskimen käyttöä.
- Kaikki luvun tehtävät on tarkoitus ratkaista **laskimen avulla**.

5.3 Monivalintatehtäviä

- Kerrataan kurssin asioita monivalintatehtävien avulla.
- Osa tehtävistä on tarkoitus ratkaista ilman laskinta ja osassa voi käyttää laskinta.

5.1 Kurssin keskeiset asiat

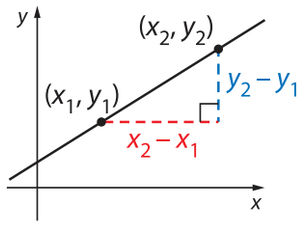
Suora matemaattisena mallina

- Ensimmäisen asteen polynomifunktiota kutsutaan **lineaariseksi funktioksi**.
  - Jos suureet x ja y riippuvat toisistaan lineaarisesti eli suoraviivaisesti, pisteet (x, y) asettuvat suoralle.
  - Lineaarista riippuvuutta mallinnetaan **suoran yhtälön** avulla.

- Suoran yhtälö voidaan esittää **ratkaistussa muodossa** $y = kx + b$.
  - k on suoran **kulmakerroin**.
  - $(0, b)$ on piste, jossa suora leikkaa y-akselin.

- Suoran kulmakerroin k voidaan laskea kahden suoran pisteen (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) avulla, $x_1 \neq x_2$.

$$k = \frac{y\text{-koordinaatin muutos}}{x\text{-koordinaatin muutos}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



- Suora on
  - **nouseva**, jos $k > 0$
  - **laskeva**, jos $k < 0$
  - ***x*-akselin suuntainen**, jos $k = 0$.

- Jos suora kulkee pisteen (x_0, y_0) kautta ja kulmakerroin on k, suoran yhtälö on

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

- Suoran yhtälö voidaan esittää **yleisessä muodossa** $Ax + By + C = 0$ (A, B ja C ovat reaalilukuja).

- Kaksi suoraa s ja t ovat
  - **yhdensuuntaisia** eli $s \parallel t$, jos suorien kulmakertoimet ovat samat eli $k_s = k_t$
  - **kohtisuorassa** eli $s \perp t$, jos suorien kulmakertoimien tulo on -1 eli $k_s \cdot k_t = -1$.

Eksponenttifunktio matemaattisena mallina

- Jos suure x muuttuu yhtä pitkissä aikaväleissä yhtä paljon, tilannetta voidaan mallintaa eksponenttifunktion f avulla.

$$f(x) = a \cdot k^x \qquad a \neq 0,\ k > 0 \text{ ja } k \neq 1$$

- Eksponenttifunktiolla $f(x) = a \cdot k^x$ mallinnetaan **eksponentiaalista kasvua tai vähenemistä**.
  - Jos eksponenttifunktion arvot kasvavat muuttujan arvojen kasvaessa, funktio kuvaa eksponentiaalista kasvua. Tällöin $k > 1$.
  - Jos eksponenttifunktion arvot pienenevät muuttujan arvojen kasvaessa, funktio kuvaa eksponentiaalista vähenemistä. Tällöin $0 < k < 1$.

- Eksponenttifunktion $f(x) = e^x$ kantalukuna on Neperin luku $e = 2{,}718\ldots$

- Yhtälöä $a^x = b$ sanotaan **eksponenttiyhtälöksi**. Yhtälöllä on ratkaisu, jos
  - vakiot a ja b ovat positiivisia reaalilukuja
  - eksponentti x on reaaliluku.

- Eksponenttiyhtälö voidaan ratkaista joko **samankantaisten potenssien** tai **logaritmin** avulla.

- Yhtälön $a^x = b$ ratkaisu on a-kantainen logaritmi luvusta b, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$.

$$a^x = b$$
$$x = \log_a b$$

- Yhtälön $e^x = b$ ratkaisu on **luonnollinen logaritmi** luvusta b.

$$e^x = b$$
$$x = \ln b, \quad b > 0$$

- **Potenssiyhtälön** $x^n = a$ ratkaisu on
  - $x = \sqrt[n]{a}$, jos n on pariton kokonaisluku ja a on reaaliluku
  - $x = \pm\sqrt[n]{a}$, jos n on parillinen kokonaisluku ja $a \geq 0$.

- Potenssiyhtälöllä $x^n = a$
  - on **yksi ratkaisu**, jos eksponentti on **pariton** luku
  - on **kaksi ratkaisua**, jos eksponentti on **parillinen** luku ja $a > 0$
  - on **yksi ratkaisu**, jos eksponentti on **parillinen** luku ja $a = 0$
  - **ei ole ratkaisua**, jos eksponentti on **parillinen** luku ja $a < 0$.

Aritmeettinen jono matemaattisena mallina

- Lukujen muodostamaa jonoa kutsutaan **lukujonoksi**.
  - Lukujonon lukuja kutsutaan **jäseniksi** tai **termeiksi**.
  - Jonossa olevilla luvuilla on tietty paikka, johon viitataan **järjestysluvulla**.

- Kun muodostetaan sääntö jonon jäsenen ja sen järjestysluvun välille, saadaan lauseke, jota kutsutaan lukujonon **yleiseksi jäseneksi**.

- Lukujono on **aritmeettinen**, jos sen kahden peräkkäisen termin erotus eli **differenssi *d*** on vakio.

$$d = a_{n+1} - a_n$$

- Aritmeettisen jonon n:s jäsen eli yleinen jäsen on $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$.
  - a_1 on jonon ensimmäinen jäsen.
  - d on differenssi.
  - n on järjestysluku ($n = 1, 2, 3, \ldots$).

- Aritmeettisen jonon a_n avulla voidaan mallintaa tilanteita, joissa
  - suureen absoluuttinen muutos pysyy vakiona
  - suureen arvo riippuu positiivisista kokonaisluvuista n.

- Kun aritmeettisen jonon a_1, a_2, a_3,… peräkkäisiä jäseniä lasketaan yhteen, saadaan aritmeettinen summa.

- **Aritmeettinen summa** voidaan laskea käyttäen kaavaa $S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$.
  - n on yhteenlaskettavien määrä.
  - a_1 on ensimmäinen yhteenlaskettava.
  - a_n on viimeinen yhteenlaskettava.

Geometrinen jono matemaattisena mallina

- Lukujono on **geometrinen**, jos sen kahden peräkkäisen jäsenen suhde q on vakio.
  - Vakiota q sanotaan lukujonon **suhdeluvuksi**.

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

- Geometrisen jonon **yleinen jäsen** on $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.
  - a_1 on jonon ensimmäinen jäsen.
  - q on suhdeluku.
  - n on järjestysluku ($n = 1, 2, 3, \ldots$).

- Geometrisen jonon a_n avulla voidaan mallintaa tilanteita, joissa
  - suureen suhteellinen muutos pysyy vakiona
  - suureen arvo riippuu positiivisista kokonaisluvuista n.

- Kun äärellinen määrä geometrisen jonon peräkkäisiä jäseniä lasketaan yhteen, muodostuu **geometrinen summa**.

- Geometrinen summa voidaan laskea käyttäen kaavaa $S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$.
  - a_1 on ensimmäinen yhteenlaskettava.
  - q on suhdeluku.
  - n on yhteenlaskettavien lukumäärä.

Tehtävät

1. Muodosta suoran yhtälö, kun suora kulkee
a) pisteen $(0, -3)$ kautta ja sen kulmakerroin on -2
b) pisteen $(1, 2)$ kautta ja sen kulmakerroin on -3.

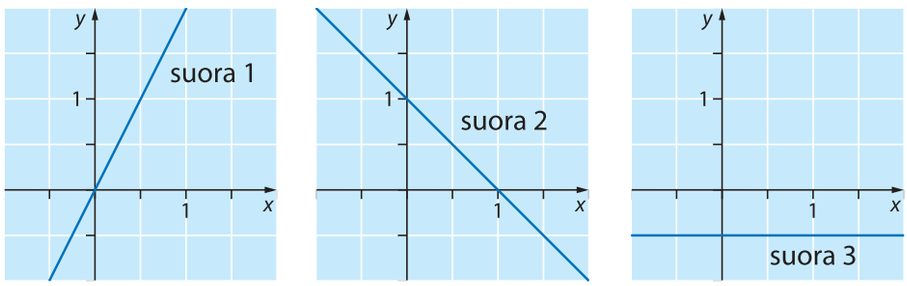
2. Muodosta suoran yhtälö, kun se kulkee annettujen pisteiden kautta.
a) $(2, 4)$ ja $(-1, -5)$ **b)** $(10, -3)$ ja $(2, 1)$

3. Suora kulkee pisteiden $(1, -8)$ ja $(-2, 1)$ kautta.
a) Muodosta suoran yhtälö.
b) Onko piste $(7, -14)$ suoralla?

4. Geometrisen jonon kaksi ensimmäistä jäsentä ovat $a_1 = 64$ ja $a_2 = 32$.
a) Määritä lukujonon yleinen jäsen.
b) Laske yleisen jäsenen avulla a_7.

5. Aritmeettisen jonon ensimmäinen jäsen on -10. Määritä jonon yleinen jäsen, kun
a) lukujonon toinen jäsen on -7
b) lukujonon differenssi on -4.

6. Alla on kolmen suoran kuvaajat. Esitä niiden yhtälöt muodossa $y = kx + b$. Perusteluita ei tarvita. [K2015, 1]



7. Mikä luku x toteuttaa annetun yhtälön?

a) $2^x = 2$ **b)** $2^x = \frac{1}{2}$ **c)** $2^x = 8^2$

d) $3^x = \frac{1}{3^5}$ **e)** $10^x = 1000$ **f)** $10^x = 0{,}01$

[S2014, 2]

8. Mikä luku x toteuttaa annetun yhtälön?

a) $3^{2x} = \frac{1}{9}$ **b)** $4^{3x} = 8^{x-1}$ **c)** $\frac{27^{x+2}}{9^{1-3x}} = 1$

9. Ratkaise eksponenttiyhtälö logaritmia käyttäen.

a) $5^x = 4$ **b)** $2^{3x} = 3$ **c)** $e^{x-1} = 2$

10. Ratkaise potenssiyhtälö.

a) $x^4 = 81$ **b)** $2x^6 = 10$ **c)** $3x^5 - 12 = 0$

11. Aritmeettiselle jonolle $a_3 = 12$ ja $a_7 = 32$.

a) Määritä lukujonon differenssi.

b) Määritä yleinen jäsen.

c) Onko luku 57 tämän lukujonon jäsen?

12. Geometriselle jonolle $a_2 = -6$ ja $a_5 = 48$. Määritä lukujonon

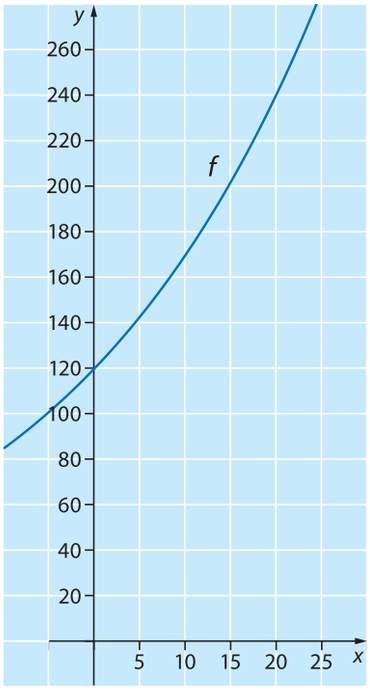
a) suhdeluku q

b) yleinen jäsen.

13. Suoran yhtälö yleisessä muodossa on $-4x + 2y - 16 = 0$.

a) Mikä on suoran kulmakerroin?

b) Missä pisteissä suora leikkaa koordinaattiakselit?



14. Elintarvikkeisiin joutuneet haitalliset bakteerit eli patogeenit voivat suotuisissa olosuhteissa lisääntyä erittäin nopeasti. Salaattiannokseen joutui *Salmonella enterica* -suolistobakteeria. Bakteerien lukumäärää salaatissa kuvaa funktio $f(x) = 120 \cdot 1{,}0353^x$, kun saastumisesta oli kulunut x minuuttia. Kuvassa on funktion f kuvaaja.

a) Kuinka monta bakteeria ruokaan joutui?

b) Kuinka monta prosenttia bakteerien määrä kasvoi yhden minuutin aikana?

c) Bakteerit lisääntyvät jakaantumalla kahtia. Päättele kuvaajan avulla aika, jossa bakteeri jakaantuu kahtia.

15. Aritmeettisen jonon yleinen jäsen on $a_n = 2 + 3n$. Laske tämän lukujonon kymmenen ensimmäisen jäsenen summa.

16. Aritmeettisen jonon kuudes jäsen on 25. Kuudennen ja seitsemännen jäsenen keskiarvo on 27. Laske kuuden ensimmäisen jäsenen summa.

17. Geometrisen jonon ensimmäinen jäsen on –3 ja lukujonon suhdeluku on 2. Laske summakaavaa käyttäen lukujonon kuuden ensimmäisen jäsenen summa.

18. Suoran yhtälö on $y = 2x + 3$.

a) Määritä suoran $y = 2x + 3$ normaali n siten, että normaali ja suora leikkaavat toisensa y-akselilla.

b) Määritä suora t, joka on yhdensuuntainen suoran $y = 2x + 3$ kanssa ja joka kulkee pisteen (2, 5) kautta.

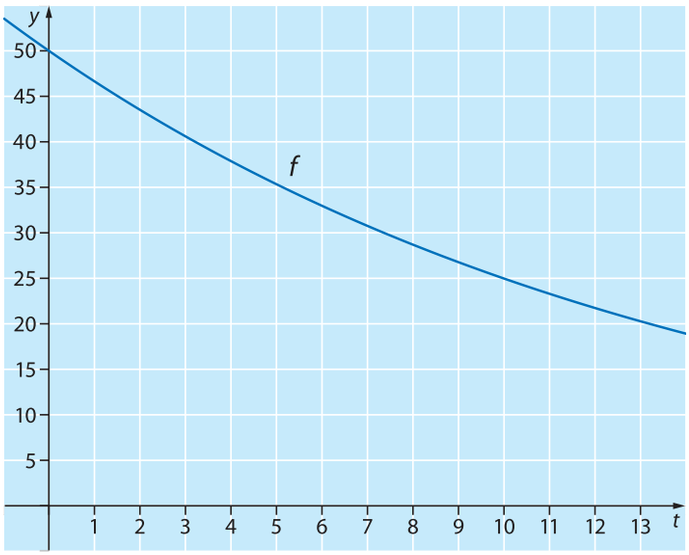
c) Määritä suorien n ja t leikkauspiste.

19. Platinan isotooppi Pt-188 hajoaa elektronisieppauksella kevyemmäksi alkuaineeksi. Mineraalista eristettiin pieni määrä tätä platinan isotooppia. Platinan määrää grammoina kuvaa funktio $f(t) = 50 \cdot 0{,}943^t$, jossa t on aika tunteina eristyshetkestä alkaen. Alla on funktion f kuvaaja.

a) Kuinka monta grammaa platinaa alussa oli?

b) Kuinka monta prosenttia platinasta hajoaa yhden tunnin aikana?

c) Päättele kuvaajan avulla isotoopin puoliintumisaika eli aika, jossa aineesta on hajonnut puolet.

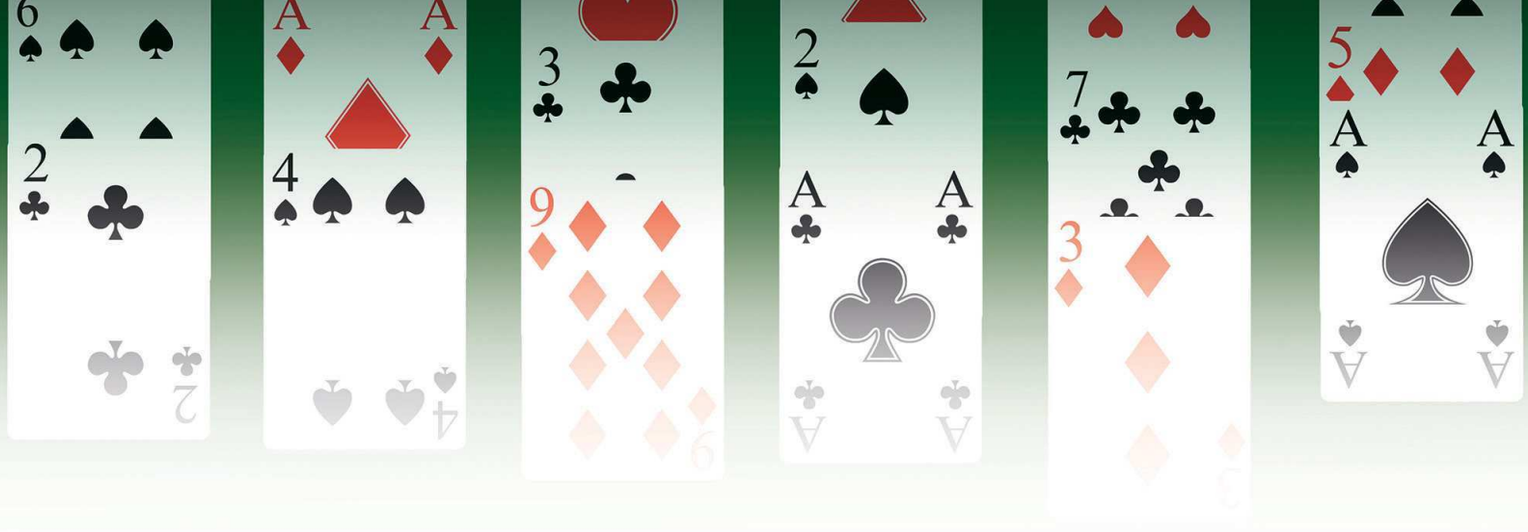


20. Kokeessa arvosana riippui lineaarisesti pistemäärästä. Arvosanaan 10 vaadittiin 30 pistettä. Arvosanan 7 sai 15 pisteellä.

a) Muodosta riippuvuutta kuvaavan suoran yhtälö.

b) Minkä arvosanan sai 10 pisteellä?

c) Kuinka monta pistettä vaadittiin arvosanaan 8?



21. Eräässä pasianssipelissä kortit jaetaan kahdeksaan pinoon siten, että ensimmäisessä pinossa on yksi kortti. Seuraavissa pinoissa on aina kaksi korttia enemmän kuin edellisessä. Peliin tarvitaan kaksi identtistä korttipakkaa.

a) Korttien määrät eri pinoissa muodostavat aritmeettisen jonon. Määritä tämän jonon yleinen jäsen.

b) Kuinka monta korttia on kahdeksannessa pinossa?

c) Kuinka monta korttia jää kahdeksan pinon ulkopuolelle? Yksi korttipakka sisältää 52 korttia.

22. Laske summakaavojen avulla seuraavat summat.

a) $\sum_{n=4}^{13}(-2n+3)$ **b)** $\sum_{n=3}^{8}((-2)^{n-1})$

23. Kiia katsoo televisiota 64 tuntia kuukaudessa. Hän päättää vähentää katselua vuoden kuluessa siten, että tammikuussa hän katsoo enää 60 tuntia. Seuraavina kuukausina hän vähentää katseluaikaa aina 4 tuntia edellisen kuukauden määrästä. Kuukausien katseluajat muodostavat aritmeettisen jonon.

a) Määritä lukujonon yleinen jäsen.

b) Kuinka monta tuntia Kiia käyttää television katseluun elokuussa?

c) Kuinka monta tuntia hän katsoo televisiota yhteensä vuoden aikana?

24. Suoran yhtälö on $(2a-1)x+6y+2=0$, jossa a on reaaliluku. Määritä vakio a siten, että suora

a) on x-akselin suuntainen

b) on laskeva

c) kulkee pisteen $(1, -1)$ kautta.

25. Laske suorien $y=-2x-3$ ja $y=-2x+2$ välinen etäisyys.

5.2 Matemaattisia malleja

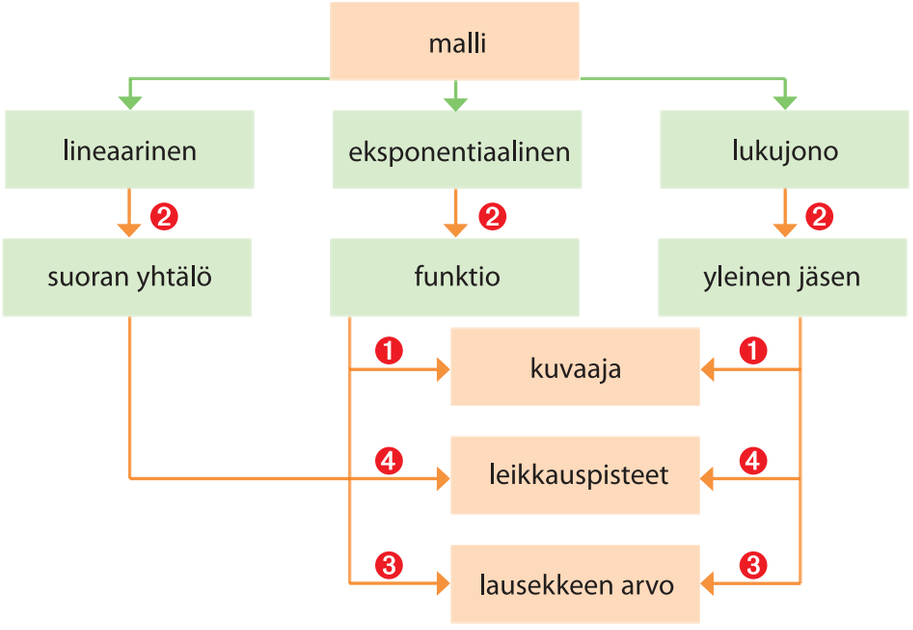
Teknisen apuvälineen käyttöä tulee harjoitella ihan samalla tavalla kuin matemaattisten tehtävien ratkaisua muutenkin: erilaisia tehtäviä on ratkaistava riittävä määrä, jotta toiminnot tulevat tutuiksi. Tällä kurssilla teknistä apuvälinettä on opeteltu käyttämään seuraavissa tilanteissa:

❶ **Kuvaajien** avulla tarkastellaan tilanteita **graafisesti**.
- funktion/yhtälön/lukujonon kuvaajan piirtäminen
- koordinaattiakselien leikkauspisteiden määrittäminen
- funktion/lukujonon jäsenen arvon määrittäminen
- yhtälön ratkaiseminen
- akselien asteikkojen muuttaminen kuvaajanäkymässä

❷ Riippuvuuksia kuvaavia **lausekkeita** voidaan **muodostaa** ja **muokata** laskimen avulla.
- suoran sovittaminen pistejoukkoon
- suoran yhtälön ratkaistun muodon määrittäminen
- lukujonoihin liittyvien lausekkeiden sieventäminen

❸ Funktioiden ja lausekkeiden **arvoja lasketaan** laskimella sijoittamalla muuttujan paikalle lukuarvoja.

❹ **Yhtälöt** ja **epäyhtälöt ratkaistaan** laskimen Ratkaise-toiminnolla, jos tilannetta ei pyydetä tarkastelemaan graafisesti.



ESIMERKKI 1

Opettaja antoi matematiikan kokeen arvosanat desimaalilukuina yhden desimaalin tarkkuudella. Kun kokeesta saatu pistemäärä oli 13, arvosanaksi tuli 5,6. Arvosanan 7,4 sai 22 pisteellä. Alin mahdollinen arvosana oli 4,0. Arvosanan (y) riippuvuutta saadusta pistemäärästä (x) voidaan mallintaa lineaarisella mallilla.

a) Muodosta riippuvuutta kuvaavan suoran yhtälö.
b) Mikä on Topiaksen koearvosana, kun hän sai kokeesta 28 pistettä?
c) Mikä oli kokeen maksimipistemäärä?
d) Millä muuttujan x arvoilla malli on pätevä?

RATKAISU

a) Riippuvuutta kuvaava suora kulkee pisteiden (13; 5,6) ja (22; 7,4) kautta. Lasketaan ensin suoran kulmakerroin.

$$k = \frac{7,4 - 5,6}{22 - 13} = 0,2$$

$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Muodostetaan suoran yhtälö sijoittamalla kulmakerroin $k = 0,2$ ja pisteen $(x_0, y_0) = (13; 5,6)$ koordinaatit suoran yhtälöön $y - y_0 = k(x - x_0)$.

$$y - 5,6 = 0,2(x - 13)$$
$$y = 0,2x + 3$$

Ratkaise yhtälöstä y ja sievennä lauseke laskinohjelmalla.

b) Lasketaan Topiaksen arvosana sijoittamalla suoran yhtälöön $x = 28$.

$$y = 0,2 \cdot 28 + 3 = 8,6$$

c) Kokeen maksimipistemäärä saavutetaan, kun arvosana $y = 10$.

$$0,2x + 3 = 10$$
$$x = 35$$

d) Alin mahdollinen arvosana on 4. Lasketaan, millä pistemäärällä tämä arvosana saadaan.

$$0,2x + 3 = 4$$
$$x = 5$$

Koska maksimipistemäärä on 35, malli on pätevä, kun $5 \le x \le 35$.

VASTAUS

a) $y = 0,2x + 3$ **b)** 8,6 **c)** 35 pistettä **d)** $5 \le x \le 35$ pistettä

ESIMERKKI 2

Kartalla on joki, jonka toista rantaa voidaan kuvata suoralla $y = -3x + 8$.

a) Joen vastakkaisella rannalla kasvaa puu pisteessä $A(15, -34)$. Muodosta suoran yhtälö, joka kuvaa joen vastarantaa, kun joki on kartalla yhtä leveä joka kohdasta.

b) Laske joen leveys kahden merkitsevän numeron tarkkuudella, kun koordinaatiston yksikkönä on 10 m.

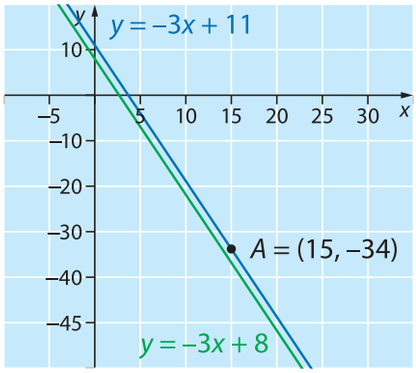
RATKAISU

a) Koska joki on joka kohdasta yhtä leveä, joen rantoja kuvaavat suorat ovat yhdensuuntaiset. Tällöin kummankin suoran kulmakerroin on $k = -3$.

Muodostetaan vastarantaa kuvaavan suoran yhtälö.

$$y - (-34) = -3(x - 15)$$

$$y = 11 - 3x$$

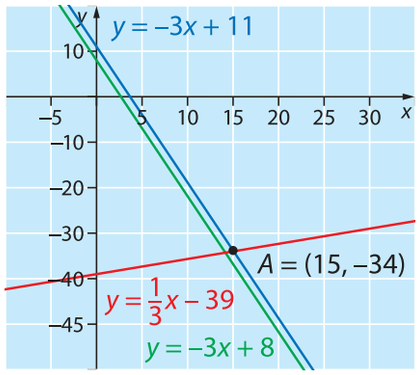


b) Muodostetaan ensin joen rantoja kuvaavia suoria vastaan kohtisuora suora s, joka kulkee pisteen $A(15, -34)$ kautta.

Merkitään kohtisuoran suoran kulmakerrointa kirjaimella k. Kohtisuorien suorien kulmakertoimien tulo on -1.

$$-3 \cdot k = -1$$

$$k = \frac{1}{3}$$



Muodostetaan suoran s yhtälö.

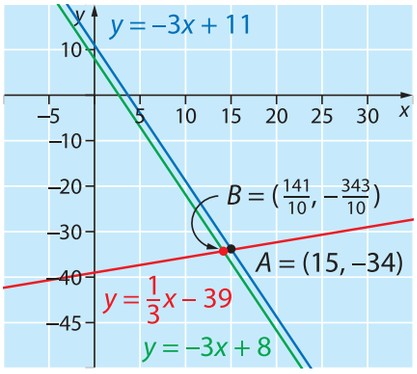
$$y - (-34) = \frac{1}{3}(x - 15)$$

$$y = \frac{1}{3}x - 39$$

Lasketaan suoran s ja suoran $y = -3x + 8$ leikkauspisteen B koordinaatit.

$$\begin{cases} y = -3x + 8 \\ y = \frac{1}{3}x - 39 \end{cases}$$

$$x = \frac{141}{10} \quad \text{ja} \quad y = -\frac{343}{10}$$



Joen leveys saadaan, kun lasketaan pisteiden A ja B välinen etäisyys.

$$d = \sqrt{\left(\frac{141}{10} - 15\right)^2 + \left(-\frac{343}{10} - (-34)\right)^2}$$

$$= \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$= 0{,}9486...$$

Pisteiden (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) välinen etäisyys:
$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Koordinaatiston yksikkönä on 10 m, joten joen leveys on

$$0{,}9486\ldots \cdot 10 \text{ m} = 9{,}486\ldots \text{ m} \approx 9{,}5 \text{ m}.$$

VASTAUS **a)** $y = 11 - 3x$ **b)** 9,5 m

ESIMERKKI 3

Vuonna 2012 EU-maissa tuotettiin keskimäärin 4984 kg jätettä asukasta kohden. Oletetaan, että jätteiden määrää pystyttäisiin vähentämään 1,5 % vuosittain.

a) Muodosta funktio f, joka kuvaa jätteiden määrää asukasta kohti, kun vuodesta 2012 on kulunut x vuotta.

b) Kuinka paljon tämän mallin mukaan jätteitä tuotetaan asukasta kohti vuonna 2025?

c) Kuinka monen vuoden kuluttua jätteiden määrä asukasta kohti on alle 3800 kg?

d) Kuinka monta prosenttia jätteiden määrää tulisi vähentää vuosittain, jos tavoitteeksi asetettaisiin, että vuonna 2020 jätteiden määrä asukasta kohden tulisi olla 4000 kg? Anna vastaus yhden desimaalin tarkkuudella.

RATKAISU

a) Muodostetaan ensin jätteiden määrän vähenemistä kuvaava prosenttikerroin.

$$100\ \% - 1{,}5\ \% = 98{,}5\ \% = 0{,}985$$

Jätteiden määrää x vuoden kuluttua kuvaa funktio $f(x) = 4984 \cdot 0{,}985^x$.

b) Vuonna 2025 on kulunut aikaa $2025 - 2012 = 13$ vuotta.

$$f(13) = 4984 \cdot 0{,}985^{13} = 4094{,}95\ldots \approx 4095\ (\text{kg})$$

c) Jätteiden määrä asukasta kohti on alle 3800 kg, kun $f(x) < 3800$.

$$4984 \cdot 0{,}985^x < 3800$$

$$x > 17{,}946\ldots$$

Jätteiden määrä on alle 3800 kg asukasta kohti 18 vuoden kuluttua.

d) Merkitään vähenemistä kuvaavaa prosenttikerrointa kirjaimella a. Vuonna 2020 on kulunut $2020 - 2012 = 8$ vuotta aikaa tarkastelun alusta lukien. Muodostetaan tietojen avulla potenssiyhtälö.

$$4984 \cdot a^8 = 4000$$

$$a = -0{,}9728\ldots \text{ tai } a = 0{,}9728\ldots$$

Prosenttikerroin ei voi olla negatiivinen luku, joten $a = 0{,}9728\ldots$.
Jätteiden määrää vähennetään $1 - 0{,}9728\ldots = 0{,}0271\ldots \approx 2{,}7\ \%$.

VASTAUS

a) $f(x) = 4984 \cdot 0{,}985^x$ **b)** 4095 kg **c)** 18 vuoden kuluttua
d) 2,7 %

ESIMERKKI 4

Saimaannorppia arvioitiin olevan vuonna 2016 yhteensä 360 yksilöä. Suojelu- ja tutkimustyön ansiosta saimaannorpan kanta on hitaasti kasvanut. Suojelun tavoitteena on kasvattaa saimaannorppien lukumäärää 400 yksilöön vuoteen 2025 mennessä. Tällöin saimaannorpalta poistuisi välittömän sukupuuton uhka. Kuvataan saimaannorppien lukumäärää eri vuosina vuodesta 2016 alkaen lukujonon avulla.

a) Muodosta lukujonon yleinen jäsen a_n, kun lukujono on aritmeettinen.

b) Muodosta lukujonon yleinen jäsen b_n, kun lukujono on geometrinen. Anna suhdeluku neljän desimaalin tarkkuudella.

c) Piirrä lukujonojen kuvaajat samaan koordinaatistoon. Piirrä näkyviin jonon 30 ensimäistä jäsentä.

RATKAISU

a) Jonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 360$. Vuoden 2025 saimaannorppien määrä on jonon $2025 - 2015 = 10$. jäsen eli $a_{10} = 400$.

Aritmeettisen jonon yleisen jäsenen määrittämiseksi tarvitaan ensimmäisen jäsenen lisäksi differenssi d. Muodostetaan yhtälö jonon 10. jäsenen avulla ja ratkaistaan siitä differenssi.

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$$a_{10} = 400$$
$$360 + (10-1) \cdot d = 400$$
$$d = \frac{40}{9}$$

Jonon differenssi voi olla murtoluku. Lukujonon avulla laskettavien tilanteiden vastaukset pyöristetään kuitenkin "kokonaisiksi norpiksi".

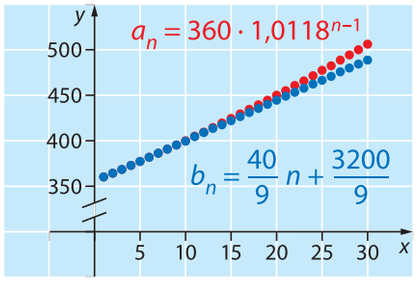
Jonon yleinen jäsen: $a_n = 360 + (n-1) \cdot \frac{40}{9} = \frac{40}{9}n + \frac{3200}{9}$

b) Ratkaistaan geometrisen jonon suhdeluku 10. jäsenen avulla.

$$b_{10} = 400$$
$$360 \cdot q^{10-1} = 400$$
$$q = 1{,}011775\ldots \approx 1{,}0118$$

Jonon yleinen jäsen: $b_n = 360 \cdot 1{,}0118^{n-1}$

c) Piirretään lukujonojen kuvaajat samaan koordinaatistoon.



VASTAUS

a) $a_n = \frac{40}{9}n + \frac{3200}{9}$

b) $b_n = 360 \cdot 1{,}0118^{n-1}$

ESIMERKKI 5

Vuonna 2009 Suomessa rekisteröitiin 90 574 henkilöautoa. Vuonna 2015 vastaava luku oli 107 904 autoa. Kuinka monta uutta henkilöautoa Suomessa rekisteröitiin yhteensä vuosien 2009–2015 aikana, jos autojen määrät eri vuosina muodostavat

a) aritmeettisen **b)** geometrisen jonon?

RATKAISU

a) Aritmeettisen summan laskemiseen tarvitaan

- ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 90\,574$
- yhteenlaskettavien määrä $n = 2015 - 2008 = 7$
- viimeinen yhteenlaskettava $a_7 = 107\,904$.

Lasketaan summan arvo summakaavan avulla.

$$S_7 = 7 \cdot \frac{90\,574 + 107\,904}{2} = 694\,673$$

Aritmeettinen summa

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$$

b) Geometrisen summan laskemiseen tarvitaan

- ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 90\,574$
- yhteenlaskettavien määrä $n = 2015 - 2008 = 7$
- suhdeluku q.

Suhdeluku q voidaan selvittää yleisen jäsenen avulla.

- Geometrisen jonon yleinen jäsen on muotoa $a_n = 90\,574 \cdot q^{n-1}$.
- Geometrisen jonon seitsemäs jäsen $a_7 = 107\,904$.

$$90\,574 \cdot q^{7-1} = 107\,904$$

$$q = -1{,}0296... \text{ tai } q = 1{,}0296...$$

Henkilöautojen määrä ei voi olla negatiivinen, joten $q = 1{,}0296\ldots$

Lasketaan geometrisen jonon seitsemän ensimmäisen jäsenen summa.

$$S_7 = 90\,574 \cdot \frac{1 - 1{,}0296...^7}{1 - 1{,}0296...} = 693\,198{,}89... \approx 693\,199$$

Geometrinen summa

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

VASTAUS

a) 694 673 autoa **b)** 693 199 autoa

Tehtävät

26. Helsingin kaupunki teetti ennusteen kaupungin väestönkasvusta vuodesta 2012 alkaen. Ennusteen mukaan asukasluku kasvaa lineaarisesti aikavälillä 2012–2030 niin, että kaupungissa on 607 417 asukasta vuoden 2014 alussa ja 629 894 asukasta vuoden 2018 alussa. Ennusteessa ei otettu huomioon mahdollisia kuntaliitoksia.

a) Ennusteen mukaan asukasluku y toteuttaa yhtälön
$y = a(x - 2014) + b$,
kun x on vuosiluku. Määritä vakioiden a ja b tarkat arvot käyttämällä yllä mainittuja tietoja.

b) Kuinka paljon asukasluku kasvaa ennusteen mukaan aikavälillä 2014–2030? Anna vastaus 1000 asukkaan tarkkuudella.

c) Piirrä asukasluvun kuvaaja välillä $2014 \leq x \leq 2030$.
[K2014, 14]

E1

27. Kauppias tutki viikon myyntitulon (y) riippuvuutta mainontaan käytetystä rahamäärästä (x). Kun kauppias käytti mainontaan 150 euroa, viikon myyntitulot olivat 3000 €. Kun mainontaan käytetty rahamäärä oli 330 €, viikon myyntitulot nousivat 4800 euroon. Kauppiaan on saatava viikossa vähintään 2000 euron myyntitulot.

a) Riippuvuutta voidaan mallintaa lineaarisella mallilla. Muodosta riippuvuutta kuvaavan suoran yhtälö.

b) Kuinka suuret ovat viikon myyntitulot, jos mainontaan käytetään rahaa 280 €?

c) Kuinka paljon kauppiaan tulisi käyttää rahaa mainontaan, jos hän haluaisi viikon myyntitulojen olevan 8000 €?

d) Millä muuttujan x arvoilla malli on pätevä?

28. Oona kirjasi ylös viikon aikana kävelylenkkiensä pituuksia ja niihin kuluneita aikoja. Tulokset ovat viereisessä taulukossa.

Lenkin pituus (km)	Lenkkiin käytetty aika (h)
3	0,6
4,5	0,9
10	2,0
25	5,0

a) Lenkin pituus (y) riippuu käytetystä ajasta (x). Merkitse pisteet koordinaatistoon ja määritä riippuvuutta kuvaavan suoran yhtälö.

b) Kuinka pitkän lenkin Oona kävelee 1,2 tunnissa?

c) Kuinka pitkän lenkin kävelee 30 minuutissa?

d) Kuinka kauan kuluu aikaa 9,4 km:n kävelylenkkiin?

e) Kuinka kauan kuluu aikaa 1,8 km:n lenkkiin? Ilmoita aika minuutteina.

29. Lääkärikeskus tarjoaa kanta-asiakkailleen pakettia, jossa lääkärikäynneistä maksetaan 75,00 euron vuosimaksu ja tämän lisäksi jokaiselta lääkärikäynniltä peritään 10,50 €/kerta.

a) Vuoden lääkärimaksut (y) riippuvat lääkärissäkäyntien määrästä (x) lineaarisesti. Muodosta riippuvuutta kuvaavan suoran yhtälö.

b) Ilman kanta-asiakaspakettia lääkärissäkäynnistä tulee maksaa 21,80 €/kerta. Kuinka monta kertaa lääkärissä tulee vähintään vuoden aikana käydä, jotta kanta-asiakaspaketti on kannattava?

30. Yksinkertaistetun mallin mukaan ilman lämpötila laskee lineaarisesti korkeuden h suhteen noin 11 kilometriin saakka. Merenpinnan tasolla $h = 0$ keskilämpötila on +15 celsiusastetta ja 11 kilometrin korkeudella −56 celsiusastetta.

a) Kuinka monta astetta ilma jäähtyy, kun noustaan 5,0 kilometrin korkeudelta 1,0 kilometriä ylöspäin?

b) Määritä ilman lämpötilan lauseke $T = T(h)$ korkeuden h avulla lausuttuna ja piirrä sen kuvaaja (h, T)-koordinaatistoon, kun $0 \leq h \leq 11$ km. [K2015, 5]

E2 **31.** Rinja ja Petrus seisovat valtatien vastakkaisilla puolilla. Valtatien reunaa, jossa Rinja seisoo, kuvaa suora $y = 5x - 14$. Petrus seisoo pisteessä (5, 18).

a) Muodosta sen suoran yhtälö, joka kuvaa Petruksen puoleista valtatien reunaa, kun tie on yhtä leveä joka kohdasta.

b) Laske valtatien leveys kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella, kun koordinaatiston yksikkönä on 10 m.

32. Kaksi lentokonetta lentää maanpinnalta katsottuna pitkin yhdensuuntaisia lentoratoja. Lentokoneen A reitti kulkee pitkin suoraa $y = 15{,}2x + 16{,}5$ ja lentokoneen B reitti kulkee pisteen (14,5; 18,1) kautta.

a) Muodosta lentokoneen B reittiä kuvaavan suoran yhtälö.

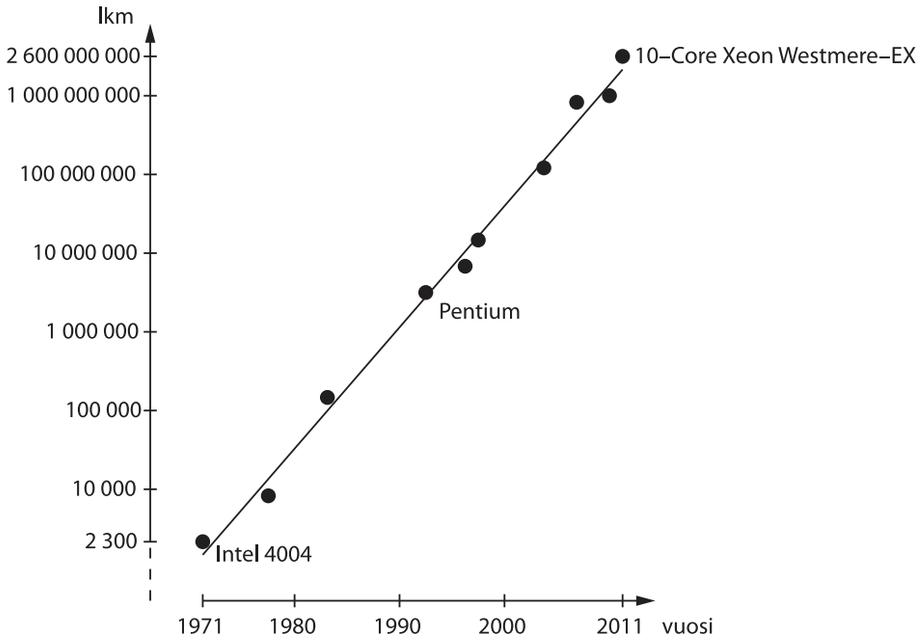
b) Lentokoneen C reitti kulkee pitkin suoraa $y = -16{,}3x - 14{,}8$. Kun lentokoneen C reitti ylittää lentokoneen B lentoradan, on lentokone A pisteessä (−4,5; −51,9). Laske lentokoneiden A ja C välinen etäisyys kilometrin tarkkuudella, kun koordinaatiston yksikkö on 1 kilometri.

33. Mikropiirin transistoreiden lukumäärä $N = N(t)$ on kasvanut kuvan mukaisesti. Ajanhetkellä $t = 0$ (vuosi 1971) lukumäärä oli 2300, ja hetkellä $t = 40$ (vuosi 2011) se oli 2 600 000 000. Lukumäärä noudattaa mallia $N(t) = N(0)e^{at}$.

a) Määritä vakion a kaksidesimaalinen likiarvo näiden tietojen perusteella.

b) Perustele a-kohdan avulla niin sanottu Mooren laki, jonka mukaan transistoreiden lukumäärä kaksinkertaistuu noin kahden vuoden välein.

[K2013, 13]



E3

34. Ensimmäinen Veikkauksen lottoarvonta suoritettiin 3.1.1971. Päävoiton suuruus oli tällöin 57 800 €. Oletetaan, että keskimääräisen päävoiton suuruus kasvoi tämän jälkeen 7,2 % vuosittain.

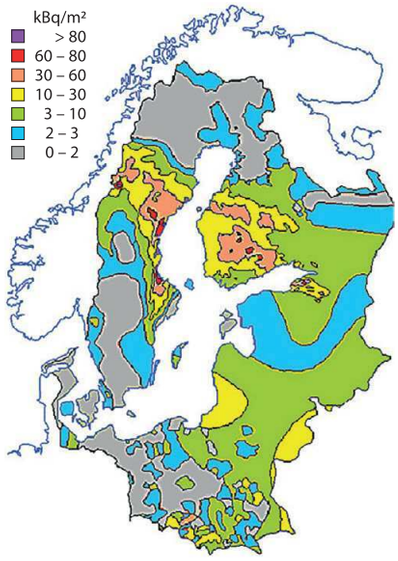
a) Muodosta funktio f, joka kuvaa keskimääräisen päävoiton suuruutta, kun vuodesta 1971 on kulunut x vuotta.

b) Kuinka suuri oli tämän mallin mukaan keskimääräinen päävoitto vuonna 2015?

c) Minä vuonna mallin mukaan keskimääräinen päävoiton suuruus ylitti 1 000 000 euron rajan?

d) Vuonna 1995 keskimääräinen loton päävoitto oli 500 000 €. Kuinka monta prosenttia päävoitto on tämän mukaan kasvanut vuosittain, jos kasvun oletetaan olevan yhtä monta prosenttia joka vuosi?

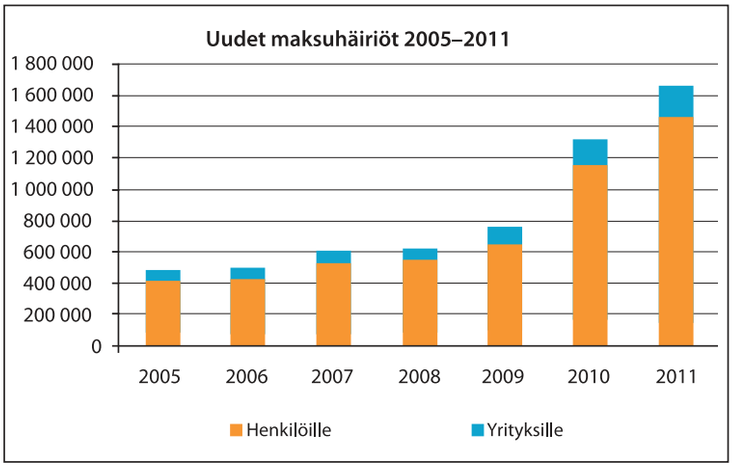
35. Tšernobylin ydinvoimalaonnettomuuden jälkeen vuonna 1987 cesium-137-laskeuman radioaktiivisuus eräillä alueilla Hämeessä ja Keski-Suomessa oli 78 kBq/m^2. Vuonna 2006 tämä oli laskenut arvoon 50 kBq/m^2. Radioaktiivisuus vähenee eksponentiaalisesti. Minä vuonna alkuperäinen aktiivisuus oli vähentynyt puoleen? Entä neljännekseen? Minä vuonna Vaasan seudun pienempi aktiivisuus on vähentynyt puoleen? [S2010, 12]



36. Vuonna 2005 yksityishenkilöiden maksuhäiriöiden lukumäärä Suomessa oli 422 500, ja vuonna 2011 se oli 1 460 500.

a) Kuinka monta prosenttia maksuhäiriöiden lukumäärä kasvoi tällä aikavälillä? Anna vastaus prosentin tarkkuudella.

b) Vuonna 2011 ministeriö asetti tavoitteeksi vähentää maksuhäiriöiden määrän neljässä vuodessa takaisin vuoden 2005 tasolle. Kuinka monta prosenttia määrä vähenee vuodessa, kun vuotuinen vähenemisprosentti on sama? Anna vastaus prosentin kymmenesosan tarkkuudella. [K2013, 8]



37. Uusi puhelinmalli tuli markkinoille tammikuun alussa. Mallia myytiin tammikuun aikana 7817 kappaletta ja huhtikuun aikana 13 238 kappaletta. Esitä arvio puhelinmallin joulukuun myynnille, kun oletetaan, että myynti kasvaa

a) lineaarisesti **b)** eksponentiaalisesti. [S2015, 11]

38. Oktaavilla tarkoitetaan sellaisen kahden sävelen välistä korkeuseroa, jossa sävelen taajuus kaksinkertaistuu. Tasavireisessä virityksessä oktaavi jaetaan kahteentoista puolisävelaskeleeseen siten, että peräkkäisten sävelten taajuussuhde on vakio. Puolisävelaskeleet ovat C, C#, D, D#, E, F, F#, G, G#, A, A# ja H. Sävelten taajuuksia voidaan kuvata geometrisen jonon avulla. Otetaan jonon ensimmäiseksi jäseneksi yksiviivainen C eli keski-C. Pianon keski-C:n taajuus on 261,6 Hz.

a) Määritä jonon suhdeluku kolmen desimaalin tarkkuudella.

b) Määritä keski-E:n taajuus hertsin (Hz) tarkkuudella.

E4 **39.** Suomen ilmasto lämpenee pääasiassa kasvihuoneilmiön voimistumisen ja siitä seuraavan maailmanlaajuisen ilmastonmuutoksen takia. Vuonna 1995 vuoden keskilämpötila Helsingissä oli 6,2 °C. Vuonna 2015 vastaava lämpötila oli 7,8 °C. Kuvataan vuoden keskilämpötilan muutosta lukujonon avulla.

a) Muodosta lukujonon yleinen jäsen a_n, kun lukujono on aritmeettinen.

b) Muodosta lukujonon yleinen jäsen b_n, kun lukujono on geometrinen. Anna suhdeluku kahden desimaalin tarkkuudella.

c) Piirrä lukujonojen kuvaajat tarkasteltavalla aikavälillä samaan koordinaatistoon.

40. Ida ja Tino osallistuvat nuorille suunnattuun liikuntaprojektiin, jonka tarkoituksena on saada nuoret harrastamaan lenkkeilyä. Ida aloittaa lenkkeilyn 1,2 km:n mittaisella lenkillä. Hän kasvattaa lenkin pituutta 15,0 % joka viikko. Tino aloittaa samaan aikaan juoksemalla ensin 2,5 km:n mittaisen lenkin. Tino kasvattaa juoksemansa lenkin pituutta 350 m joka viikko.

a) Kuinka pitkät lenkit Ida ja Tino juoksevat kuuden viikon kuluttua lenkkeilyn aloittamisesta?

b) Tutki kuvaajia apuna käyttäen, kuinka monen viikon kuluttua Ida juoksee pidemmän lenkin kuin Tino.

41. Elise ottaa 25 000 €:n lainan, jota hän lyhentää kuukausittain. Ensimmäinen lyhennys maksetaan kuukauden kuluttua lainan ottamisesta. Vuoden kuluttua Elisellä on lainaa jäljellä 17 300 €. Elise maksaa koko lopun lainan pois silloin kun lainaa on jäljellä alle 1000 €. Kuinka monen kuukauden kuluttua lainan ottamisesta Elise on saanut koko lainan maksettua pois, kun lainan määrää lyhennysten jälkeen kuvataan

a) aritmeettisella jonolla **b)** geometrisella jonolla.

E5

42. Vuonna 1995 Suomessa syntyi 63 067 lasta. Vastaava luku vuonna 2015 oli 55 472. Kuinka monta lasta Suomessa syntyi yhteensä vuosien 1995–2015 aikana, jos syntyneiden lasten lukumäärät eri vuosina muodostavat

a) aritmeettisen **b)** geometrisen jonon?

43. Rasmus saa jaettavakseen 5000 mainoslehtistä. Ensimmäisenä päivänä hän jakaa niistä 70. Seuraavina päivinä hän jakaa aina 65 mainoslehtistä enemmän kuin edellisenä päivänä, niin kauan kuin tämä on mahdollista.

a) Kuinka monen päivän kuluttua Rasmus saa viimein mainoslehtiset jaettua?

b) Kuinka monta mainoslehtistä hän jakaa viimeisenä päivänä?

44. Kun kumipallo putoaa korkeudesta h, se ponnahtaa ylöspäin korkeuteen $0{,}8 \cdot h$ saakka. Pallo pudotetaan yhden metrin korkeudesta. Mikä on pallon kulkema matka, kun se kymmenennen kerran osuu lattiaan? [S2016, 8]

45. Minka saa tädiltään 8-vuotissyntymäpäivälahjaksi 500 €. Täti lupaa korottaa lahjasummaa aina 8,5 % joka vuosi.

a) Kuinka paljon Minka saa tädiltään syntymäpäivälahjarahaa 18-vuotislahjaksi? Anna vastaus euron tarkkuudella.

b) Kuinka paljon Minka on saanut tädiltään syntymäpäivälahjarahaa yhteensä 18-vuotissyntymäpäiväänsä mennessä, kun 18-vuotislahjaraha lasketaan mukaan? Anna vastaus euron tarkkuudella.

c) Minkä ikäisenä Minka on saanut tädiltään syntymäpäivälahjarahaa yhteensä yli 15 000 €?

5.3 Monivalintatehtävät

Monivalintatehtävät 1–20 on tarkoitus ratkaista ilman teknistä apuvälinettä. Tehtävissä 21–38 voit käyttää teknistä apuvälinettä.

Vastausvaihtoehdoista vain yksi on oikein. Monivalintatehtävät on tarkoitettu nopeaan kertaamiseen. Niiden avulla on helppo huomata, jos kirjan jokin osa-alue vaatii vielä lisää harjoittelua.

1. Tarkastellaan suureen x riippuvuutta suureesta y taulukon avulla.

x	y
–2	–1
–1	0
1	2

Riippuvuutta kuvaa yhtälö

a) $y = 2x$

b) $y = \frac{1}{2}x$

c) $y = x + 1$.

2. Kaupan asiakasmäärä muuttui eräänä lauantaina siten, että se kasvoi 30 asiakkaalla tunnissa. Tarkastelun alussa klo 10.00 kaupassa oli 50 asiakasta. Asiakasmäärän y riippuvuutta ajasta t (h) tarkastelun alusta lukien kuvaa yhtälö

a) $y = 30t$

b) $y = 50 + 30t$

c) $y = 10 + 30t$.

3. Suoran kulmakerroin on 3 ja suora leikkaa y-akselin pisteessä $(0, -1)$. Suoran yhtälö on

a) $y = -x + 3$

b) $y = 3x$

c) $y = 3x - 1$.

4. Suoran $2y - 5x = 3$ ratkaistu muoto on

a) $y = -\frac{5}{2}x + \frac{3}{2}$

b) $y = \frac{5}{2}x + \frac{3}{2}$

c) $x = \frac{2}{5}y - \frac{3}{5}$.

5. Suora kulkee pisteiden $(3, -1)$ ja $(4, 2)$ kautta. Suoran kulmakerroin on

a) $\frac{1}{3}$

b) 1

c) 3.

6. Suoran kulmakerroin on -2 ja suora kulkee pisteen $(3, -1)$ kautta. Suoran yhtälö on

a) $y = -2x + 3$

b) $y = 2x + 5$

c) $y + 2x - 5 = 0$.

7. Suoran $y = -2x + 5$ kanssa yhdensuuntainen suora on

a) $y = 2x + 5$

b) $y = -2x - 1$

c) $y = \frac{1}{2}x - 5$.

8. Suoran $y = -3x + 1$ normaalin yhtälö on

a) $y = 3x - 1$

b) $y = -\frac{1}{3}x + 1$

c) $y = \frac{1}{3}x - 1$.

9. Aineen määrää m (g) hetkellä t (min) tarkastelun alusta alkaen kuvaa funktio $m(t) = 120 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$. Aineen määrä 1 min kuluttua tarkastelun alusta oli

a) 120 mg

b) 60 mg

c) 240 mg.

10. Tilillä olevan pääoman (€) suuruus riippuu ajasta x (a) funktion $f(x) = 500 \cdot 1{,}0015^x$ mukaisesti. Tilin vuotuinen korkoprosentti on

a) 1,0015 %

b) 0,15 %

c) 1,5 %.

11. Näytteessä, jonka massa on 120 g, on epäpuhtauksia 5 g. Epäpuhtauksien määrä vähenee eksponentiaalisesti 15 % jokaista puhdistuskertaa kohden. Epäpuhtauksien p (g) määrä puhdistuskertojen x (kpl) funktiona on

a) $p(x) = 120 \cdot 0{,}15^x$

b) $p(x) = 5 \cdot 0{,}85^x$

c) $p(x) = 5 \cdot 1{,}15^x$.

12. Yhtälön $4^{x-1} = 2^{3x}$ ratkaisu on

a) -2

b) 2

c) -1.

13. Eksponenttiyhtälöllä on ratkaisu $x = \ln 3$. Eksponenttiyhtälö on

a) $e^x - 3 = 0$

b) $e^x + 3 = 0$

c) $10^x - 3 = 0$.

14. Yhtälön $x^3 = -64$ ratkaisu on

a) $x = 4$ tai $x = -4$

b) $x = -16$

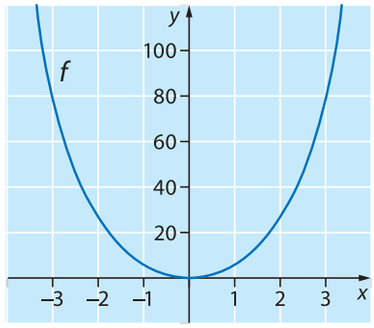
c) $x = -4$.

15. Yhtälön $f(x) = 80$ ratkaisu kuvaajan avulla on

a) $x \approx 80$

b) $x \approx 3$

c) $x \approx 3$ tai $x \approx -3$.



16. Aritmeettisen jonon ensimmäinen jäsen on -5 ja toinen jäsen -7. Jonon yleinen jäsen on

a) $a_n = 2n - 7$

b) $a_n = -2n - 3$

c) $a_n = -7 + (n - 1) \cdot (-5)$.

17. Geometrisen jonon yleinen jäsen on $a_n = -5 \cdot 3^{n-1}$. Peräkkäisen jäsenten suhde on

a) 3

b) -3

c) -5.

18. Kuinka monta yhteenlaskettavaa on summassa $\sum_{n=3}^{25}(20n-5)$?

a) 22
b) 25
c) 23

19. Kuinka monta yhteenlaskettavaa on summassa $-3-1+1+\ldots+25$?

a) 25
b) 15
c) 10

20. Kuinka moni aritmeettisen jonon $-7, -10, -13, \ldots$ jäsenistä on suurempia kuin -154?

a) 154 jäsentä
b) 50 jäsentä
c) 49 jäsentä

---

21. Kuivauksessa materiaalista, esim. viljasta, poistetaan vettä. Kuivauksessa poistettava vesimäärä y (kg) viljatonnia kohden riippuu viljan puintikosteudesta x (%) yhtälön $y = 15x - 215$ mukaisesti. Jos poistettava vesimäärä viljatonnia kohden on 150 kg, niin puintikosteus on

a) 24,3 %
b) 15 %
c) 21,5 %.

22. Suoran yhtälö on $4y - 5ax + 2 = 0$ ja piste $(19, -10)$ kuuluu suoralle. Vakion a arvo on

a) $-\frac{39}{25}$
b) $-\frac{2}{5}$
c) -5.

23. Suora l kulkee pisteiden $(2, -1)$ ja $(a+2, -3)$ kautta. Suoran l eräs normaali on $y = -5x + 6$, jolloin vakio a on

a) 10
b) -10
c) $\frac{2}{5}$.

24. Suora s kulkee pisteiden $(c-3, 4)$ ja $(2c, 2)$ kautta ja on yhdensuuntainen suoran $y = -2x - 5$ kanssa. Mikä on vakion c arvo?

a) $c = 2$
b) $c = -2$
c) $c = -1$

25. Suora $2y - 3x + 5 = 0$ leikkaa x-akselin pisteessä

a) $\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$
b) $\left(\frac{5}{3}, 0\right)$
c) $(5, 0)$.

26. Yritys mainostaa uutuustuotettaan. Havaittiin, että tuotteen myyntitulot riippuivat lineaarisesti mainoskuluista. Kun tuotetta mainostettiin 1000 eurolla, myyntitulo oli 92 000 €. Mainostukseen käytettyjä varoja vähennettiin puoleen, jolloin myyntitulo oli 70 000 €. Riippuvuutta kuvaavan suoran yhtälö on

a) $y = 44x + 48\,000$
b) $y = 48x + 44\,000$
c) $y = 44x - 48\,000$.

27. Suomen väkilukua vuosina 1900–1980 kuvaa funktio $p(t) = 2\,745\,000 \cdot e^{0{,}007t}$, jossa t kuvaa aikaa vuosina vuodesta 1900 alkaen. Mikä on mallin mukaan väkiluku vuonna 1955?

a) 4 030 000
b) 4 000 000
c) 4 060 000

28. Superpallo pudotetaan 1,9 m:n korkeudelta. Pallon suurinta korkeutta (m) maan pinnasta x pompun jälkeen kuvaa lauseke $1{,}9 \cdot 0{,}72^x$. Kuinka monennen pompun jälkeen pallon suurin korkeus oli 0,51 m?

a) 2. pompun jälkeen
b) 4. pompun jälkeen
c) 5. pompun jälkeen

29. Yritys teetti tutkimuksen, jonka mukaan suurin osa tuotteen kysynnän vaihtelusta voitiin selittää hinnan vaihtelulla. Tutkimuksessa todettiin, että tuotteen kysyntä y (kpl) voitiin laskea hinnan korotuksen x (€) avulla seuraavasti:
$y = 8043 \cdot e^{-0{,}1997x}$, $x > 0$.
Kuinka suuri tuotteen hinnan korotus oli, jos kysyntä oli 1000 (kpl)?

a) 1,50 €
b) 10,44 €
c) 5,67 €

30. Kofeiinin puoliintumisaika elimistössä on noin kuusi tuntia aineenvaihdunnasta riippuen. Kuinka monta prosenttia kofeiinipitoisuus vähenee tunnissa?

a) 89 %
b) 11 %
c) 8,3 %

31. Potilaan saamasta lääkeannoksesta poistuu 45 % 20 tunnissa. Kuinka monta prosenttia lääkeannoksesta poistuu tunnissa?

a) 4,1 %
b) 3,9 %
c) 2,9 %

32. Erään kunnan asukasluku pienenee 2,75 % vuosittain muuttoliikkeen johdosta. Vuonna 2011 kunnassa oli 11 780 asukasta. Minä vuonna asukasluku ensimmäisen kerran alittaa 8000 asukkaan rajan?

a) 2024
b) 2025
c) 2026

33. Oliver tallettaa 950 € tilille, jonka vuotuinen korko on 0,25 %. Oletetaan, ettei muita talletuksia tehdä eikä tililtä nosteta rahaa. Tilillä on rahaa 4 vuoden kuluttua

a) 959,54 €
b) 1048, 62 €
c) 957,14 €.

34. Aritmeettisen jonon $a_n = 15n + 33$ sadan ensimmäisen jäsenen summa on

a) 76 050
b) 75 900
c) 79 050.

35. Mikä on summan $\sum_{n=4}^{15} \left(\frac{1}{2} \cdot 4^{n-1}\right)$ ensimmäinen yhteenlaskettava?

a) $\frac{1}{2}$
b) 32
c) 4

36. Kuinka monta yhteenlaskettavaa on summassa $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{9}{4} + \ldots + \frac{2187}{4}$?

a) 7
b) 8
c) 9

37. Miika on kesätöissä rakennustyömaalla. Hän maalaa varastohallin vuorilautoja. Ensimmäisenä työpäivänään Miika maalaa 29 lautaa. Maalattavien lautojen määrä kasvaa 6 laudalla päivittäin. Kuinka monta lautaa Miika maalaa 7. työpäivänään?

a) 71
b) 65
c) 42

38. Henri on kesätöissä marjatilalla. Hän poimii vadelmia 29 l ensimmäisenä työpäivänään. Poimittujen marjojen määrä kasvaa 6 l päivittäin. Kuinka paljon marjoja Henri poimii ensimmäisen viikon aikana?

a) 65 l
b) 350 l
c) 329 l

Vastaukset

1.1 Suora matemaattisena mallina

1. a) 24 € b) 18 € c) $12x$ €

2. a) $y = 3x$ b) $y = -4x$

3. a)

t (h)	s (km)
0	2
1	47
4	182

b) 2 km c) 1 h

4. a) $\frac{11}{3}$ b) 2

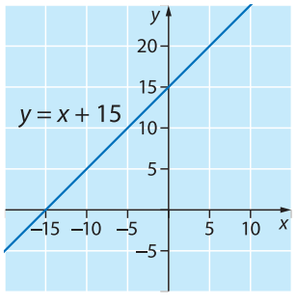
5. a) 1357 kpl b) 50 000 kpl

6. a) 300 km
b) 86 km
c) 1 h 50 min

7. a) $y = 120 + 3x$ (kg)
b) 135 kg
c) 15

8. a) $y = 1{,}20x + 3$ (€)
b) 183 €
c) 56 €

9. a) $y = x + 15$
b)

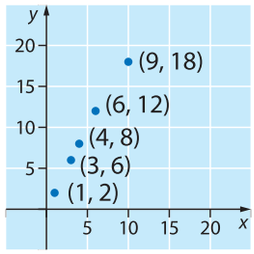


c) $x < -15$

10. a) $y = -2{,}5x + 15{,}5$
b) 5,5 °C
c) klo 20.24 jälkeen

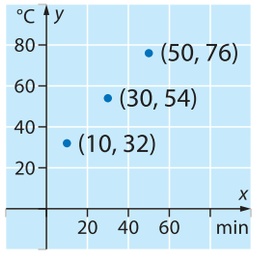
11. a) $y = -0{,}07x + 75$ (l)
b) 64,5 l
c) 343 km
d) 1071 km

12. a)



b) $y = 2x$
c) $0 \le x \le 10$ (kpl)

13. a)



b) $y = 1{,}1x + 21$ (°C)
c) $0 \le x \le 50$ (min), 21 °C

14. a) $B(4{,}2;\ 1{,}5)$, $C(8{,}4;\ 3{,}0)$, $D(12{,}6;\ 4{,}5)$, $E(16{,}8;\ 6)$
b) $y = 0{,}36x$

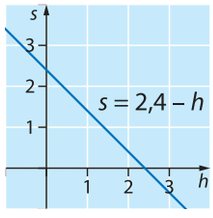
15. a) $y = 32x + 200$ (€)
b) 280 €
c) 4,5 h

16. a) $y = -0{,}08t + 10$
b) 9,6 l
c) 125 h

17. a) 81,5 kg
b) 167 cm
c) Malli ei ole pätevä.

18. a) $y = 0{,}25x + 3{,}75$
b) 7,5
c) 25 pistettä

19. a) $s = 2{,}4 - h$ (m)
b)



c) $0 < h < 2{,}4$ (m)
d) 1,75 m

1.2 Suoran yhtälö

20. a) $k = 7$, nouseva
b) $k = -1$, laskeva
c) $k = -\frac{1}{3}$, laskeva

21. a) (0, –2) b) (0, 0) c) (0, 6)

22. a) laskeva
b) laskeva
c) nouseva

23. a) $k = -2$, laskeva
b) $k = 3$, nouseva

24. a) nouseva b) laskeva

25. a) –1 b) 0

26. a) $\frac{2}{3}$
b) (0, 2)
c) $y = \frac{2}{3}x + 2$

27. a) $y = -5x - 3$ b) $y = 1$

28. a) $k = 4$, (0, –3)
b) $k = -\frac{3}{5}$, (0, 2)
c) $k = 3$, $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$
d) 0, (0, –5)

29. a) (0, 1) ja $\left(-\frac{1}{5}, 0\right)$
b) kuuluu

30. a) (0, –15), (5, 0)
b) (0, 0)
c) (0, 4), (8, 0)

31. a) nouseva
b) (–25, 0)
c) (0, 5)

32. a) $x + 2y - 2 = 0$
b) ei kuulu

33. a) $y = x + 11$
b) $y = \frac{1}{3}x + 7$

34. a) $y = -\frac{1}{5}x - \frac{9}{5}$
b) $y = -\frac{1}{5}x - 4$

35. a) $y = 5x + 17$
b) $y = 2x - 11$
c) $y = -6$

36. a) $y - 2x + 16 = 0$
b) $5y - x - 26 = 0$

37. a) $a = -1$, $k = -4$
b) $(4, -9)$

38. a) $c = -\frac{7}{8}$ b) $c = -\frac{2}{5}$

39. $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$

40. a) $a < \frac{3}{7}$
b) $a = 1$ ja $y = -3x - 5$

41. a) $a > -\frac{1}{2}$
b) $a = -\frac{1}{6}$

42. a) $y = \frac{3}{2}x - 3$
b) $y = -\frac{1}{2}x + 1$

43. a) $k = -3$, laskeva
b) $k = \frac{1}{2}$, nouseva

44. a) $y = -3x + 4$
b) $y = -\frac{5}{3}x + 3$
c) $y = 3x + 41$

45. kyllä

46. a) $a > 1$
b) $a = 9$, $y = 6x + 16$

1.3 Yhdensuuntaisuus ja kohtisuoruus

47. A ja D, C ja E

48. a) esim. $y = 2x + 1$
b) esim. $y = -x + 5$
c) esim. $y = \frac{3}{4}x - 2$

49. a) Eivät ole.
b) Eivät leikkaa.

50. a) ei
b) ei
c) kyllä

51. kyllä

52. a) $y = \frac{2}{3}x + 15$
b) $c = \frac{1}{3}$

53. a) $y = 2x + 39$
b) $y = \frac{1}{8}x + 9$

54. a) $a = -\frac{3}{2}$
b) $a = \frac{1}{5}$

55. a) ei b) kyllä

56. a) kyllä b) eivät

57. a) $y = -3x - 30$
b) $(0, -30)$, $(-10, 0)$

58. a) $y = \frac{3}{4}x + 6$
b) $y = \frac{3}{4}x - 25$

59. a) $y = -\frac{4}{3}x + 13$
b) Ei kuulu.

60. a) $a = -8$ b) $(-15, -5)$

61. a) $(-1, 2)$ b) kyllä

62. a) $c = -159$
b) $-x + 7y - 157 = 0$
c) $(-3, 22)$

63. a) $y = 2x + 6$
b) $y = -\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2}$

64. a) $y = \frac{3}{2}x + 1$
b) $y = \frac{3}{2}x + \frac{15}{2}$

65. a) $-\frac{7}{4}$ b) $-\frac{1}{5}$

66. a) $c = -2$ b) $c = 6$

67. a) $a = -6$
b) $y = -10x + \frac{22}{3}$
c) Ei ole.

Sovelluksia lineaarisesta mallista

68. a) $y = -\frac{4}{3}x + \frac{205}{3}$
b) $-5 \le x \le 34$
c) ei

69. a) $y = 12x + 160$
b) 244
c) 2017

70. a) $y = -18x + 1697$
b) 565 min
c) 60,9°

71. a) $y = 1{,}25x$
b) 272 min
c) 150 km

72. a) miehet: $y = -\frac{1}{3}x + 147$,
naiset: $y = -\frac{17}{30}x + 150$
b) 1993
c) 135 mmHg

73. a) autolla
b) moottoripyörällä
c) 64 s kuluttua, 52 m/s

74. a) 154,80 €
b) 0,019 €
c) yli 10 901 kWh

75. a) liikuntakerhossa
b) liikuntakerhossa
c) 30 kertaa

76. a) $y = \frac{7}{5}x$ (m)
b) 46 s kuluttua

77. a) $(2, -4)$, $(-2, 4)$, $(4, -2)$
b) –
c) 12

78. a) $(-2, 2)$, $(5, 2)$, $(3, 4)$, $(0, 4)$
b) 10 a

79. a) $y = 2x$ b) 11 m

80. $\left(\frac{10}{7}, \frac{16}{7}\right)$ ja 2,9 km

81. 3,3

82. 20,6 °C

83. a) $y = 325x + 5{,}5$ (kg)
b) 430 kg
c) 0 m^3, malli ei päde.

84. $y = -\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$, pinta-ala 5

85. a) (3, 5) b) 112 m

2.1 Eksponenttifunktio

86. a) $f(-3) \approx 8$, $f(-1) \approx 2$, $g(1) \approx 2$, $g(3) \approx 8$
b) g
c) $f(-4) = g(4) \approx 16$
d) $x = -6$
e) $x \approx 0$

87. a) $h(0) \approx 8$, $h(1) \approx 4$
b) $x \approx -1$
c) $-1 < x < 2$

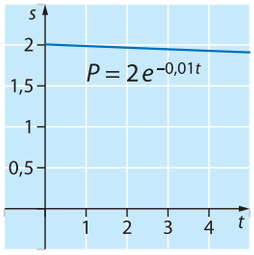
88. f – A, g – E, h – F, k – D, j – C, l – B

89. a) $f(3) \approx 64$ b) $x \approx 6$

90. a) $x \approx 0$
b) 20
c) $x \approx 2{,}5$

91. a) 1000 bakteeria
b) 2600 bakteeria
c) 17 h kuluttua

92. a)



b) 2 milj. asukasta
c) 69 vuodessa
d) 0,7 milj. asukasta

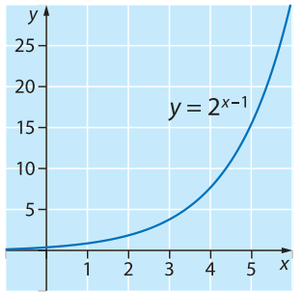
93. a) 1,5 mg
b) 0,017 %
c) 8 vuorokautta

94. a) 2700 solua
b) 16 h kuluttua

95. a) $m(x) = 300 \cdot 0{,}9995^x$ (mg)
b) 292 mg

96. a) $f(x) = 1900 \cdot 1{,}13^x$ (kg)
b) 5700 kg
c) 1000 kg

97. a) $f(x) = 2^{x-1}$ (kg)
b) 512
c)



d) 11. ruudussa

98. a) $m(x) = 250\,000 \cdot 1{,}05^x$ (€)
b) 370 000 €
c) 220 000 €

99. a) $h(x) = 800 \cdot 0{,}92^x$ (mg)
b) 110 mg
c) 36 h

100. a) $T(x) = 5{,}0 \cdot 1{,}0077^x$ (°C)
b) 11 °C
c) 3,4 °C

101. a) 10 b) 20
c) $x \approx 1$ d) $x < 0$

102. a) 0,0032 mol/l b) 0,7

103. a) 12 000
b) 11 kuukauden kuluttua
c) Myynti vakiintuu tasolle 15 000 kpl.

104. a) $k(x) = 44{,}87 \cdot 1{,}194^x$ (€)
b) 91,20 €
c) 18,50 €

105. a) $p(x) = 165 \cdot 0{,}975^x$ (mrd. €)
b) 100 mrd. €
c) 47 vuoden kuluttua

2.2 Eksponenttiyhtälön ratkaiseminen

106. a) $x = 1$ b) $x = \frac{1}{4}$
c) $x = -2$

107. a) $x = 5$ b) $x = \frac{3}{2}$
c) $x = 2$ d) $x = -2$

108. a) $x = \frac{1}{3}$ b) $x = -1$

109. a) $x = \frac{6}{5}$ b) $x = \frac{3}{11}$

110. a) $x = \log_3 7$ b) $x = \log_2 6$
c) $x = \ln 3$ d) $x = \ln 2 + 1$

111. a) $x = \frac{\log_2 13}{5}$

b) $x = \frac{\ln 2 + 1}{2}$

112. a) $5^x = 14$
b) $e^x = 5$
c) $e^{4x} = 3$

113. a) $x \approx 3{,}0$ b) $x \approx 1{,}6$

114. a) 40 000 € b) 4500 €:lla

115. a) 14 vuorokauden kuluttua
b) 19 vuorokaudessa

116. a) 4 vuoden kuluttua
b) 9 vuoden kuluttua

117. a) 7 pisteellä
b) 27 pisteellä

118. a) $f(x) = 10\,000 \cdot 1{,}02^x$ (€)
b) 13 vuotta

119. a) $f(x) = 1{,}8 \cdot 0{,}95^x$ (milj. €)
b) 11 vuoden kuluttua

120. a) $55\,040 \cdot 0{,}972^x$
b) 3 vuoden kuluttua
c) 2011

121. a) 233 vuodessa
b) 70 vuotta

122. a) $x = \frac{4}{3}$

b) $x = \frac{2}{5}$

c) $x = \frac{7}{4}$

123. a) $x = \log_5 4$
b) $x = \log_4 33$
c) $x = \ln 3$

124. a) 1997 b) 2007

125. a) 5 vuoden kuluttua
b) 10 vuotta

126. a) $0{,}58 \cdot 1{,}0080^t$ (g)
b) 87 h kuluttua

2.3 Potenssiyhtälö

127. a) $A-g,\ B-f$
b) $x \approx -1$
c) $x \approx 0$ tai $x \approx 1$

128. $A-h,\ B-g,\ C-f$

129. a) $x = \pm 4$ b) $x = -10$
c) $x = \sqrt[7]{2}$ d) $x = \pm\sqrt[8]{3}$

130. a) $(\sqrt[3]{-3}, 0)$ b) $x = -2$

131. a) $x = \pm\sqrt[4]{5}$ b) $x = \pm\sqrt[4]{7}$

132. a) 195 cm^3 b) 6,70 cm

133. a) $0{,}0058\ \frac{\text{mol/l}}{\text{s}}$
b) 2,30 mol/l

134. 70 km/h

135. a) 3,8 b) 73

136. a) 4,4 % b) 19 %

137. 3,6 %

138. 0,47 %

139. 5,1 %

140. 4,6 %

141. a) $x = \pm\sqrt[8]{5}$
b) $x = -1$
c) $x = \pm 2$

142. a) 5,04 cm b) 152 cm^2

143. a) 1738 km
b) $1{,}434 \cdot 10^{15}\ \text{km}^3$

144. 2,4 %

145. a) 56 g b) 58 kg

Sovelluksia

146. a) 13,0 mg/l
b) vähenee 1,5 %
c) 10,8 mg/l
d) 64 kuukauden kuluttua

147. a) 212 000 bakteeria
b) 25 % c) 31 h

148. a) 5,1 % b) 500 virusta
c) 52 h kuluttua

149. a) 29 vuodessa b) 4,7 %

150. a) 24 vuodessa b) 0,39 %

151. a) 12,2 %

152. 58 %

153. a) 14 %
b) 9,3 vuoden kuluttua

154. a) 8,8 % b) 63 vuodessa

155. 2049

156. 8 vuorokautta; 59,5 kBq

157. a) 0,323 %
b) 215 vuodessa

158. a) 5,4 %
b) 13 vuoden kuluttua

159. a) 15 % b) 170 vuodessa

160. a) 383 ppm
b) 24 vuotta sitten
c) 496 ppm

161. a) 0,94 % b) 1,3 %

162. a) laskee 16 %
b) 9 vuoden kuluttua

163. 20 000 vuotta

Aritmeettinen ja geometrinen jono

164. a) aritmeettinen
b) geometrinen
c) geometrinen
d) ei kumpaakaan

165. a) $a_n = 3n - 9,\ a_{20} = 51$
b) $a_n = -6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},\ a_5 = -\frac{3}{8}$

166. a) $a_n = -5n + 8,\ a_{10} = -42$
b) $a_n = \frac{1}{6}n + \frac{1}{6},\ a_{10} = \frac{11}{6}$

167. a) $a_n = 5 \cdot 2^{n-1},\ a_4 = 40$
b) $a_n = \frac{1}{4} \cdot 3^{n-1},\ a_4 = \frac{27}{4}$

168. a) $a_n = 5n - 9$
b) kyllä
c) 9 ensimmäistä jäsentä

169. a) $d = -2$ b) -996
c) kyllä

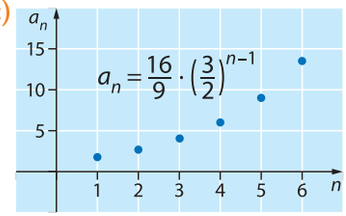
170. a) $a_1 = -1$ b) 14. jäsen

171. a) $a_n = 3n$ b) $a_n = 3^{n-1}$

172. a) $a_n = -4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$
b) $-\frac{6561}{16\,384} \approx -0{,}400$
c) 29 ensimmäistä jäsentä

173. a) $a_n = \frac{1}{4} \cdot (-2)^{n-1}$ tai $a_n = \frac{1}{4} \cdot 2^{n-1}$
b) $a_n = \frac{1}{4} \cdot 2^{n-1}$
c) 22. jäsenestä alkaen

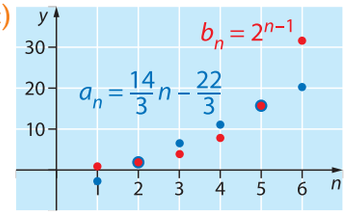
174. a) $a_n = \frac{16}{9} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$
b) $\frac{729}{16}$
c)



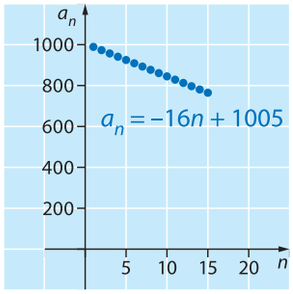
d) 19. jäsenestä alkaen

175. a) $a_n = 8n + 5$
b) 4277
c) kyllä
d) 9374 ensimmäistä jäsentä

176. a) $a_n = \frac{14}{3}n - \frac{22}{3}$
b) $b_n = 2^{n-1}$
c)



177. a) $a_n = 4n - 3$ (kpl)
b) 89 juomalasia
c) Ei

178. a) $a_n = -16n + 1005$ (kpl)
b) 765 kpl
c) 2004 – 2009
d) 

179. a) $a_n = 13n - 13$ (min)
b) klo 10.07
c) 75 lähtöä

180. a) $a_n = 1500 - 80n$ (€)
b) 460 €
c) 19 maksuerää
d) 60 €

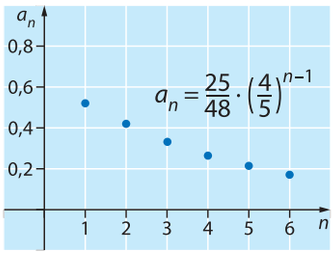
181. a) $a_n = 8\,137\,000 \cdot 1{,}026^{n-1}$
b) 9 251 000 kpl
c) 2024

182. a) $a_n = 8000 \cdot 1{,}025^n$ (€)
b) 10 241 €
c) 17 vuoden kuluttua

183. a) $a_n = 4n - 2$, $a_4 = 14$
b) $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$, $a_4 = 54$

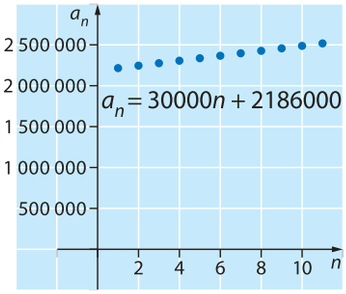
184. a) $d = 2$, $a_1 = -5$
b) $a_n = 2n - 7$
c) 123
d) kyllä
e) 43 ensimmäistä jäsentä

185. a) $a_n = \frac{25}{48} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$

b) 

c) 0,070
d) 40. jäsenestä alkaen

186. a) 2 216 000 kpl
b) $a_n = 30\,000n + 2\,186\,000$



c) 2023

187. a) $a_n = 252\,000 \cdot 0{,}935^{n-1}$
b) 129 000 työtöntä
c) 2026

3.2 Aritmeettinen summa

188. a) $a_n = 4n - 2$
b) 78 c) 800

189. a) 25 050 b) 79 800

190. a) 2100 b) –4760

191. a) 20 b) $a_n = 2n + 4$

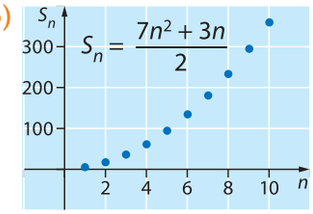
192. a) 7 b) 45
c) 20 d) 520

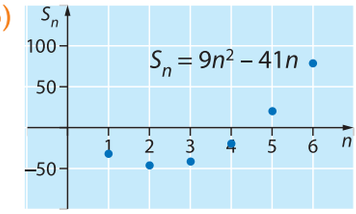
193. a) 420 b) 1350

194. a) 117 b) –750

195. a) $a_n = 47n - 2$
b) 5 885 750
c) 105 938
d) 248 446

196. 907 875

197. a) 239 jäsentä
b) 

198. a) 184 jäsentä
b) 

199. a) 45 jäsentä b) $\frac{361}{12}$

200. 19 jäsentä

201. a) 20 riviin b) 30 tainta

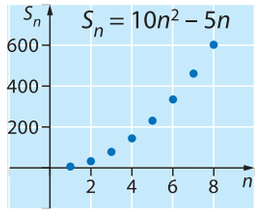
202. a) 15 kuukautta b) 35 €

203. a) 29 päivää b) 2175 mg

204. a) 13 viikkoa b) 47 km

205. a) 39 b) 200

206. a) –15 600 b) 242

207. a) 101 jäsentä
b) 2005
c) $S_n = 10n^2 - 5n$
d) 

208. a) 13 päivän kuluttua
b) 8 sivua

209. 13 askelmaa

3.3 Geometrinen summa

210. a) $a_{10} = 1536$ b) 3069

211. a) $6\,710\,886 \approx 6{,}71 \cdot 10^6$
b) $50\,220\,324 \approx 5{,}02 \cdot 10^7$

212. a) 682 b) 10 912

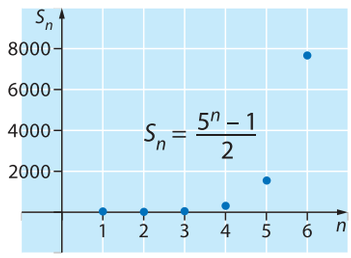
213. $q = -2$, $S_{13} = -13\,655$
$q = 2$, $S_{13} = -40\,955$

214. a) 10 b) $-\frac{58\,025}{256}$

215. a) $\frac{2047}{128}$ b) –7651

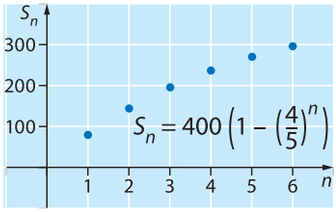
216. a) 5 b) 2560

217. a) parittomien summassa
b) parittomien summassa

218. a) 18
b) 

219. a) 9

b)



220. a) 10

b) 3 lukua

c) lukua 25

221. a) 9 h 19 min

b) 39 min

222. a)

Talletus-kerta	€
1.	850
2.	$1{,}019 \cdot 850 + 850$
3.	$1{,}019^2 \cdot 850 +$ $1{,}019 \cdot 850 + 850$

b) 9264,82 €

c) 14 talletusta

223. a) 23 h 53 min

b) Anna (91 h 28 min)

224. a) 2011

b) 29 milj. tonnia hiilidioksidiekvivalenttia

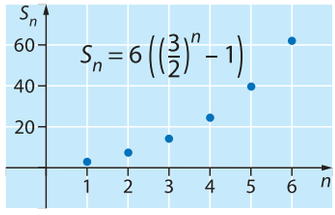
225. 6141

226. $q = \frac{1}{4}$, $S_9 \approx 0{,}80$

$q = -\frac{1}{4}$, $S_9 \approx 0{,}48$

227. a) vähintään 81 jäsentä

b)



228. a) 760 min

b) 80 min

c) 41 päivää

4.1 Suuntakulma

229. a) 11° b) −81° c) 31°

230. a) 8° b) −45° c) −56°

231. a) −54° b) 14°

232. a) 23° b) 69° c) 64°

233. 19,8°

Murtopotenssi

234. a) $7^{\frac{1}{3}}$ b) $5^{\frac{3}{4}}$ c) $2^{\frac{4}{5}}$

235. a) $10^{\frac{2}{5}}$ b) $3^{\frac{1}{2}}$ c) $3^{\frac{8}{5}}$

236. a) 5^2 b) $3^{\frac{14}{3}}$ c) $2^{\frac{11}{4}}$

237. a) $\sqrt[7]{4}$ b) $\sqrt[4]{125}$ c) $\sqrt[9]{49}$

238.

Juurimuoto	Murtopotenssi
$\sqrt[5]{3}$	$3^{\frac{1}{5}}$
$\sqrt[9]{16}$	$4^{\frac{2}{9}}$
$2 \cdot \sqrt[5]{16}$	$2^{\frac{9}{5}}$
$\sqrt[7]{125}$	$5^{\frac{3}{7}}$
$7^3 \cdot \sqrt[3]{49}$	$7^{\frac{11}{3}}$

Briggsin logaritmi

239. a) $a = 40$, $T \approx 187$ cm
$a = 23$, $T \approx 163$ cm
$a = 19$, $T \approx 143$ cm

b) 68-vuotiaana

240. a) pH ≈ 1,3

b) $[H_3O^+] \approx 3{,}98 \cdot 10^{-11} \frac{\text{mol}}{\text{l}}$

241. a) $E \approx 1{,}6 \cdot 10^{18}$

b) 1500-kertainen

242. a)

t	lg t	lg s
1	0	
2	0,3010…	1,6020…
4	0,6020…	2,2041…
10	1	3
100	2	5

b) Ajan ja paikan logaritmit asettuvat suoralle, joka leikkaa pystyakselin kohdassa 1. Pisteisiin sovitetun suoran kulmakerroin on 2.

Kurssin keskeiset asiat

1. a) $y = -2x - 3$

b) $y = -3x + 5$

2. a) $y = 3x - 2$

b) $y = -\frac{1}{2}x + 2$

3. a) $y = -3x - 5$ b) Ei ole.

4. a) $a_n = 64 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ b) 1

5. a) $a_n = 3n - 13$

b) $a_n = -4n - 6$

6. suora 1: $y = 2x$
suora 2: $y = -x + 1$
suora 3: $y = -\frac{1}{2}$

7. a) $x = 1$ b) $x = -1$
c) $x = 6$ d) $x = -5$
e) $x = 3$ f) $x = -2$

8. a) $x = -1$ b) $x = -1$

c) $x = -\frac{4}{9}$

9. a) $x = \log_5 4$

b) $x = \frac{\log_2 3}{3}$

c) $x = \ln 2 + 1$

10. a) $x = \pm 3$ b) $x = \pm\sqrt[6]{5}$
c) $x = \sqrt[5]{4}$

11. a) $d = 5$ b) $a_n = 5n - 3$
c) kyllä

12. a) $q = -2$ b) $a_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}$

13. a) $k = 2$ b) (0, 8) ja (−4, 0)

14. a) 120 b) 3,53 %
c) 20 min

15. −185

16. 90

17. −189

18. a) $y = -\frac{1}{2}x + 3$
b) $y = 2x + 1$ c) $\left(\frac{4}{5}, \frac{13}{5}\right)$

19. a) 50 g b) 6 % c) 10 h

20. a) $y = \frac{1}{5}x + 4$
b) 6 c) 20 pistettä

21. a) $a_n = 2n - 1$ b) 15
c) 40 korttia

22. a) −140 b) −84

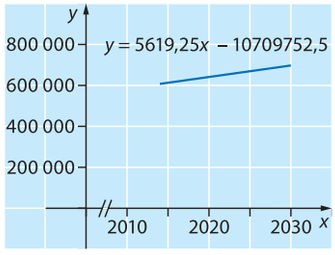
23. a) $a_n = -4n + 64$ b) 32 h
c) 456

24. a) $a = \frac{1}{2}$ b) $a > \frac{1}{2}$
c) $a = \frac{5}{2}$

25. $\sqrt{5}$

5.2 Matemaattisia malleja

26. a) $a = 5619{,}25$ ja $b = 607\,417$
b) 90 000
c)



27. a) $y = 10x + 1500$ (€)
b) 4300 €
c) 650 €
d) $x \geq 50$ (€)

28. a) $y = 5x$ (km)
b) 6 km
c) 2,5 km
d) 1,88 h ≈ 113 min
e) 22 min

29. a) $y = 75 + 10{,}50x$ (€)
b) vähintään 7 kertaa

30. a) 6,5 °C
b) $T(h) = -\frac{71}{11}h + 15$ (°C)

31. a) $y = 5x - 7$ b) 13,7 m

32. a) $y = 15{,}2x - 202{,}3$
b) 61 km

33. a) 0,35
b) Yhtälön $e^{at} = 2$ ratkaisuna $t \approx 2$ (a)

34. a) $y = 57\,800 \cdot 1{,}072^x$ (€)
b) 1 230 000 €
c) 2012
d) 9,4 %

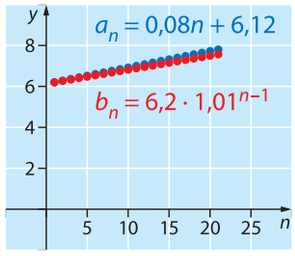
35. puoleen 2017, neljännekseen 2047, Vaasassa vähentynyt puoleen 2017

36. a) 246 % b) 26,7 %

37. a) 27 694 kpl b) 53 940 kpl

38. a) 1,059 b) 330 Hz

39. a) $a_n = 0{,}08n + 6{,}12$ (°C)
b) $b_n = 6{,}2 \cdot 1{,}01^{n-1}$ (°C)
c)



40. a) Ida: 2,8 km, Tino: 4,6 km
b) 13 viikon kuluttua

41. a) 39 kuukautta
b) 106 kuukautta

42. a) 1 244 700 lasta
b) 1 243 000 lasta

43. a) 12 päivän kuluttua
b) 655 mainoslehtistä

44. 7,9 m

45. a) 1130 €
b) 8548 €
c) 23-vuotiaana

5.3 Monivalintatehtävät

1. c

2. b

3. c

4. b

5. c

6. c

7. b

8. c

9. b

10. b

11. b

12. a

13. a

14. c

15. c

16. b

17. a

18. c

19. b

20. c

21. a

22. b

23. b

24. b

25. b

26. a

27. a

28. b

29. b

30. b

31. c

32. b

33. a

34. c

35. b

36. b

37. b

38. c

Hakemisto

A
absoluuttinen muutos 61
aritmeettinen jono 110
aritmeettinen summa 127

B
Briggsin logaritmi 155

D
differenssi 111

E
eksponentiaalinen kasvu 62
eksponentiaalinen malli 61, 62
eksponentiaalinen väheneminen 62
eksponenttifunktio 61
eksponenttiyhtälö 75
ensimmäisen asteen polynomifunktio 9
erisuuntaisuus 36

G
geometrinen jono 110
geometrinen summa 137

J
järjestysluku 110
jäsen 110

K
kohtisuoruus 39
kulkusuunta 21
kulmakerroin 20, 23, 36
kuutiojuuri 86

L
laskeva suora 21
lineaarinen funktio 9
logaritmi 77
lukujono 110
luonnollinen logaritmi 78

M
murtopotenssi 152

N
Neperin luku 62
normaali 39
nouseva suora 21

P
potenssiyhtälö 86, 88
prosenssikerroin 91

R
ratkaistu muoto 23

S
suhdeluku 111, 137
suhteellinen muutos 61
suora 9
suoran yhtälö 10, 27
suuntakulma 146, 148

T
termi 110

V
vakiotermi 21

Y
yhdensuuntaisuus 36
yleinen juuri 88
yleinen jäsen 111
yleinen logaritmi 77

2. Ratkaise yhtälö y:n suhteen.

5. Mieti, mitä muuttuja y kuvaa ja mieti, mitä muuttuja x kuvaa.

8. a) Muodosta vasarahinnan ja huutomaksun lauseke siten, että vasarahintaa kuvaa muuttuja x.

9. c) Päättele kuvaajasta, millä muuttujan x arvoilla muuttuja y saa negatiivisia arvoja.

15. a) Mallin voi muodostaa taulukoimalla tunteja ja kokonaiskustannuksia.

16. Laita selittävä muuttuja vaaka-akselille ja selitettävä pystyakselille.

19. c) Sekä pohjasärmän s että korkeuden h on oltava positiivisia.

22. Ratkaise yhtälö y:n suhteen ja tutki kulmakerrointa.

27. Sijoita kaavaan $y - y_0 = k(x - x_0)$.

31. Suora leikkaa x-akselin, kun $y = 0$.

39. Muodosta suoran t yhtälö ja ratkaise yhtälöparilla suorien leikkauspiste.

42. Määritä suoran kulmakerroin k ja y-akselin leikkauspiste.

45. Ratkaise suorien leikkauspiste ja sijoita piste viimeisen suoran yhtälöön.

46. a) Suora on nouseva, kun sen kulmakerroin on positiivinen.

47. Suorat ovat yhdensuuntaisia, jos niiden kulmakertoimet ovat yhtä suuret.

51. Muodosta suoran t kulmakerroin.

56. Kohtisuorien suorien kulmakertoimien tulo on -1.

59. b) Sijoita pisteen $(60, -83)$ koordinaatit suoran n yhtälöön.

63. Määritä kuvasta suoran kulmakerroin k.

65. Muodosta suorien yhtälöt ratkaistussa muodossa, jotta näet kulmakertoimen.

66 a) Muodosta suoran yhtälö ratkaistussa muodossa. Yhdensuuntaisten suorien kulmakertoimet ovat yhtä suuret.

70. a) Muodosta ensin suoran kulmakerroin $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ja sijoita se suoran yhtälön kaavaan $y - y_0 = k(x - x_0)$.

75. a) Perusmaksu ei riipu osallistumiskerroista.

76. a) Suoran kulmakerroin saadaan jakamalla kuljettu matka käytetyllä ajalla.

78. b) Piirrä nelikulmio koordinaatistoon.

80. Laske suorien leikkauspiste ja leikkauspisteen etäisyys talosta.

84. Piirrä mallikuva.

85. a) Muodosta suoralle normaali, joka kulkee kesämökin kautta.

87. c) Mitkä ovat muuttujan eli x:n arvot, kun funktion kuvaajan y-koordinaatti on alle 16, mutta yli 2?

88. Tutki, minkä pisteiden kautta kuvaajat kulkevat kun $x = 0$ ja $x = 1$

90. b) Selvitä, mikä on funktion $g(x)$ pisteen y-koordinaatin arvo, kun $x = -3$. Entä funktion $f(x)$ pisteen y-koordinaatin arvo, kun $x = 3$?

93. b) Mieti, mikä on perusarvo eli mihin verrataan.

96. a) Muutoskertoimen saat muodostettua vähentämällä 100 %:sta 13 % ja muuttamalla erotuksen prosenttikertoimeksi.

97. c) Lääkkeestä on poistunut 95 % eli sitä on jäljellä 100 % − 95 % = 5 %. Selvitä, kuinka paljon 5 % on 800 mg:sta.

100. c) Menneen ajan arvo saadaan sijoittamalla eksponenttifunktion eksponenttiin tehtävänantoon sopiva negatiivinen luku.

108. b) Käytä hyväksi negatiivista eksponenttia: $\frac{1}{5} = 5^{-1}$.

109 b) Kirjoita kaikki termit saman kantaluvun avulla ja käytä sitten potenssikaavaa $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

111. a) Siirrä ensin vakiot yhtälön oikealle puolelle.

112. a) Mieti, mikä lausekkeessa kuvaa eksponenttiyhtälön kantalukua ja mikä on eksponentti.

115. b) Selvitä, paljonko on puolet alkuperäisestä toriumin määrästä.

119. a) Mieti, miten saat muutoskertoimen, joka kuvaa prosentuaalista vähenemistä.

121. a) Mieti, kuinka paljon uraania on jäljellä, kun siitä on hajonnut 90 %.

128. Mieti, mikä kuvaaja saa negatiivisia arvoja ja mikä nousee jyrkimmin.

130. a) x-akselin leikkauspiste on funktion nollakohta eli funktion arvo on 0.

133. b) $v(x)$ kuvaa funktion nopeutta ja tehtävänannossa kerrotaan reaktion nopeus. Muodosta niiden avulla yhtälö.

138. Merkitse tritiumin määrää alussa esimerkiksi kirjaimella A, ($A > 0$).
148 kuukauden päästä ainetta on jäljellä puolet eli 0,5A.

139. Mieti, kuinka paljon yrityksellä on työntekijöitä jäljellä neljän vuoden kuluttua.

142. Kuution kokonaispinta-ala saadaan kaavalla $A_{kok} = 6a^2$, kun a on kuution särmä.

143. b) Sijoita $g = 25{,}90$ m/s^2. Pallon tilavuus saadaan kaavalla $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

150. a) Merkitse asuntojen määrää alussa kirjaimella a, ($a > 0$), ja muodosta prosenttikerroin. Mieti, miten voisit merkitä asuntojen määrää, kun se on kasvanut 5,0 % alkuperäisestä.

151. Merkitse liikevaihtoa alussa kirjaimella a ($a > 0$) ja muutoskerrointa kirjaimella x. Muodosta yhtälö.

152. Selvitä ensin prosentuaalinen muutos vuosina 1990−2008. Käytä saamaasi muutoskerrointa ja laske sen avulla prosentuaalinen muutos vuosina 1990−2015.

155. Selvitä prosentuaalinen muutos. Käytä saamaasi muutoskerrointa ja selvitä, minä vuonna väkiluku ylittää 10 miljardia.

156. Selvitä näytteen muutosnopeus vuorokautta kohti annettujen tietojen perusteella.

158. b) Muodosta yhtälö, jonka avulla selvität, kuinka monen kokonaisen vuoden kuluttua päästöjä on alle puolet. Vastaus kannattaa tarkistaa sijoittamalla se alkuperäiseen yhtälöön.

159. a) Muutoskerrat merkitään vuosikymmeninä.

164. Tutki, onko peräkkäisten jäsenten erotus (aritmeettinen lukujono) tai osamäärä (geometrinen lukujono) vakio.

169. a) Mieti, kuinka monta differenssiä ensimmäiseen jäseneen pitää lisätä, jotta saadaan viides jäsen. Kirjoita siis a_5 ensimmäisen jäsenen ja differenssin avulla.

174. a) Mieti, kuinka monta kertaa ensimmäinen jäsen on kerrottava suhdeluvulla, jotta saadaan kolmas jäsen. Kirjoita siis a_3 ensimmäisen jäsenen ja suhdeluvun avulla.

175. a) Kirjoita sekä a_5 että a_{132} ensimmäisen jäsenen ja differenssin avulla. Muodosta sitten yhtälöpari, ja ratkaise a_1 ja d.

176. b) Muodosta yhtälöpari, jossa käytät geometrisen jonon yleisen jäsenen kaavaa $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

177. a) Selvitä, onko kyseessä aritmeettinen (peräkkäisten kerrosten välinen erotus vakio) vai geometrinen lukujono (peräkkäisten kerrosten välinen suhde vakio).

185. d) Voit ratkaista tehtävän kuvaajan avulla tai muodostamalla yhtälön ja ratkaisemalla sen.

190. a) Onko kyseessä aritmeettinen jono? Tutki peräkkäisten jäsenten erotusta.

b) Tutki, päteekö $d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2$.

191. Muodosta yhtälö summakaavan avulla ja sijoita siihen tehtävänannossa annetut tiedot. Ratkaise n.

195. b) Muodosta 500. jäsen eli a_{500}.

199. a) Muodosta epäyhtälö siten, että summa on pienempi kuin 700.

203. a) Selvitä, minkälainen jono muodostuu. Muodosta jonon yleinen jäsen ja selvitä sen avulla, monennenko jäsenen arvo on nolla.

b) Muodosta a-kohdan tiedon avulla päivien summa.

206. b) Selvitä, monesko lukujäsen on viimeinen positiivinen luku.

208. b) Sijoita a-kohdan tulos lukujonon yleisen jäsenen lausekkeeseen.

212. a) Selvitä geometrisen lukujonon suhdeluku $q = \frac{a_2}{a_1}$.

214. a) Ratkaise yhtälöllä, monesko jäsen luku $\frac{-19\,683}{256}$ on sijoittamalla se geometrisen jonon yleisen jäsenen arvoksi.

216. Muodosta tehtävänannossa annetuista tiedoista yhtälö sijoittamalla $q = 2$, $n = 10$ ja $S_{10} = 5115$

219. Muodosta epäyhtälö, jossa summa on pienempi kuin 350.

223. Laske tehtävä tunneissa. Saatuasi summan, muuta desimaaliosa minuuteiksi kertomalla tunnissa olevien minuuttien määrällä eli luvulla 60.

225. Selvitä, monesko jäsen luku 3072 on.

228. b) Selvitä ensin, kuinka paljon Elise pelaisi viikossa, jos ei vähentäisi peliaikaansa.

1 Lineaarinen malli

1.1 Suora matemaattisena mallina

1.

Tarkastellaan kankaan hinnan ja ostetun metrimäärän riippuvuutta taulukon avulla, kun kankaan metrihinta on 12 €.

Määrä (m)	Hinta (€)
1	12
2	$12 \cdot 2 = 24$
3	$12 \cdot 3 = 36$
4	$12 \cdot 4 = 48$
x	$12 \cdot x = 12x$

Jos kankaan määrää merkitään kirjaimella x (m), kankaan hinnan riippuvuutta määrästä voidaan kuvata lausekkeella $12x$. Merkitään lauseketta $f(x) = 12x$.

a) Lasketaan hinta lausekkeen avulla.

$f(2) = 12 \cdot 2 = 24$ €

b) Muutetaan annetut arvot samoiksi yksiköiksi, 150 cm = 1,5 m.
Lasketaan hinta lausekkeen avulla.

$f(1,5) = 12 \cdot 1,5 = 18$ €

c) Lasketaan hinta lausekkeen avulla.

$f(x) = 12 \cdot x = 12x$ €

2.

a)

x	y
0	0
1	3
2	6
3	9
x	$3x$

y:n riippuvuutta x:stä voidaan kuvata lausekkeella $3x$, joten riippuvuutta kuvaava yhtälö on $y = 3x$.

b)

x	y
-3	12
-2	8
0	0
1	-4
x	$-4x$

y:n riippuvuutta x:stä voidaan kuvata lausekkeella $-4x$, joten riippuvuutta kuvaava yhtälö on $y = -4x$.

3.

a)

***t* (h)**	***s* (km)**
0	2
1	47
4	182

b) Etäisyys tien risteyksestä tarkastelu alkuhetkellä saadaan sijoittamalla yhtälöön $s = 45t + 2$ arvo $t = 0$.

$s = 45 \cdot 0 + 2 = 2 \text{ (km)}$

Tarkastelun alkuhetkellä etäisyys tien risteyksestä on 2 km.

c) Sijoitetaan yhtälöön $s = 45t + 2$ arvo $s = 47$ ja ratkaistaan t.

$47 = 45t + 2$

$45 = 45t \qquad | : 45$

$t = 1 \text{ (h)}$

Aikaa on kulunut 1 tunti.

4.

a) Sijoitetaan $x = 3$ riippuvuutta kuvaavaan yhtälöön.

$$y = \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{5}{3}$$

$$= \frac{6}{3} + \frac{5}{3}$$

$$= \frac{11}{3} = 3\frac{2}{3}$$

b) Sijoitetaan $y = 3$ riippuvuutta kuvaavaan yhtälöön ja ratkaistaan vastaava korkeus x.

$$3 = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3} \qquad \left| \cdot 3 \right.$$

$$9 = 2x + 5$$

$$2x = 4 \qquad \left| : 2 \right.$$

$$x = 2$$

5.

a) Sijoitetaan $x = 100\,000$ riippuvuutta kuvaavaan yhtälöön.

$$y = 0,02 \cdot 100\,000 - 643$$
$$= 1\,357 \text{ (kpl)}$$

b) Sijoitetaan $y = 357$ riippuvuutta kuvaavaan yhtälöön ja ratkaistaan vastaava hirvien määrä x.

$$357 = 0,02x - 643$$
$$x = 50\,000 \text{ (kpl)}$$

6.

a) Sijoitetaan $x = 2{,}5$ riippuvuutta kuvaavaan yhtälöön.

$$\begin{aligned} y &= 120 \cdot 2{,}5 \\ &= 300\ (\text{km}) \end{aligned}$$

b) Muutetaan 43 minuuttia tunneiksi.

$$\frac{43}{60}\ (\text{h})$$

Sijoitetaan $x = \frac{43}{60}$ riippuvuutta kuvaavaan yhtälöön.

$$\begin{aligned} y &= 120 \cdot \frac{43}{60} \\ &= 86\ (\text{km}) \end{aligned}$$

c) Sijoitetaan $y = 220$ riippuvuutta kuvaavaan yhtälöön ja ratkaistaan x.

$$\begin{aligned} 220 &= 120x \\ x &= 1{,}8333...\ (\text{h}) \\ x &= 1\ \text{h}\ (0{,}8333... \cdot 60)\ \text{min} \\ x &= 1\text{h}\ 50\ \text{min} \end{aligned}$$

7.

Koska päivittäisen myyntimäärän (kg) suuruus riippuu kilohinnan alennuskertojen määrästä, merkitään päivämyyntiä kirjaimella y ja kilohinnan alennuksien määrää kirjaimella x.

a) Muodostetaan malli tutkimalla päivämyynnin suuruutta taulukon avulla.

Alennuksien määrä (kpl)	**Päivämyynnin suuruus. (kg)**
0	120
1	$120+3$
2	$120+3\cdot 2$
x	$120+3\cdot x$

Riippuvuutta kuvaava yhtälö on $y=120+3x$ (kg) .

b) Sijoitetaan alennuskertojen määrä $x = 5$ riippuvuutta kuvaavaan yhtälöön.

$y=120+3\cdot 5=135$ (kg)

c) Päivämyynti on $y = 165$ (kg). Ratkaistaan alennuskertojen määrä x yhtälön avulla.

$165=120+3x$

$x=15$

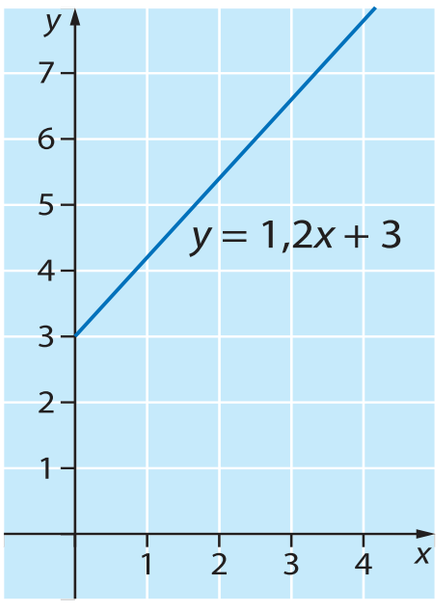
8.

Koska kokonaiskustannusten suuruus riippuu vasarahinnasta, merkitään kokonaiskustannuksia kirjaimella y ja vasarahintaa kirjaimella x.

a) Muodostetaan malli tutkimalla kokonaiskustannusten suuruutta taulukon avulla.

Vasarahinta (€)	**Kokonaiskustannukset (€)**
0	3
1	$1 + 0,2 \cdot 1 + 3 = 4,2$
2	$2 + 0,2 \cdot 2 + 3 = 5,4$
x	$x + 0,2 \cdot x + 3 = 1,2x + 3$

Riippuvuutta kuvaava yhtälö on $y = 1,2x + 3$ (€) . Piirretään kuvaaja teknisen apuvälineen avulla.



b) Sijoitetaan $x = 150$ riippuvuutta kuvaavaan yhtälöön.

$$y = 1,2 \cdot 150 + 3 = 183 \text{ (€)}$$

c) Jaakon maksama hinta on $y = 70,20$ (€). Ratkaistaan vasarahinta x yhtälön avulla.

$$70,20 = 1,2x + 3$$
$$x = 56 \text{ (€)}$$

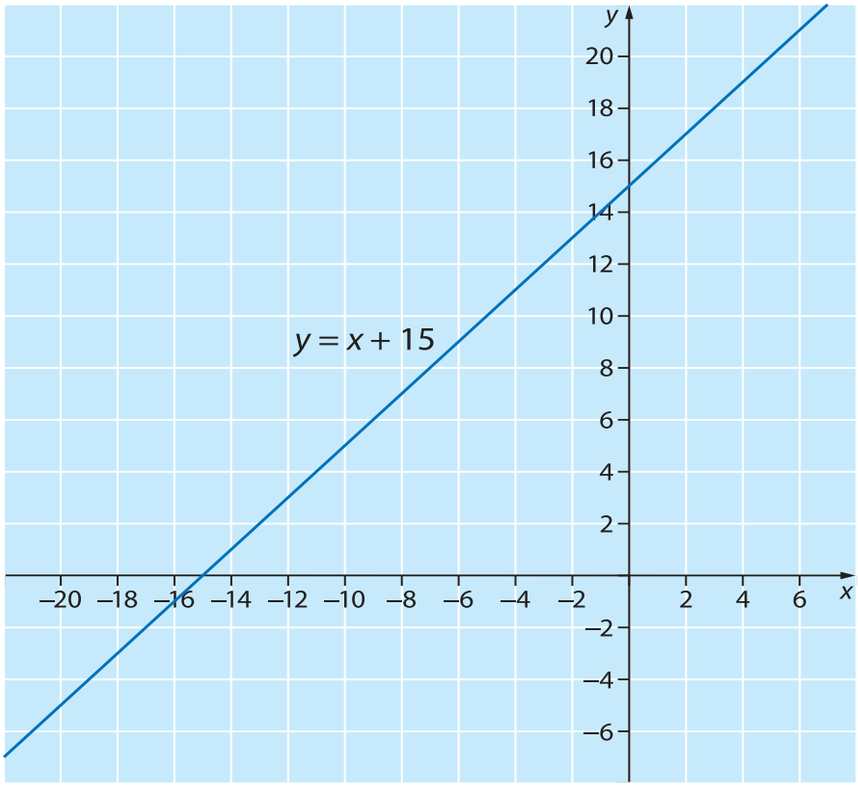
9.

a) y:n suuruus riippuu x:n suuruudesta. Muodostetaan malli tutkimalla y:n suuruutta taulukon avulla.

x	y
0	15
1	16
2	17
x	$15 + x$

Riippuvuutta kuvaava yhtälö on $y = 15 + x$.

b) Piirretään kuvaaja teknisen apuvälineen avulla.



c) Kuvaajan mukaan luvut ovat $x < -15$, jos $y < 0$.

10.

a) Muodostetaan malli.

Aika (h)	**Lämpötila (°C)**
0	$15,5$
1	$15,5 - 2,5$
2	$15,5 - 2,5 \cdot 2 = 10,5$
3	$15,5 - 2,5 \cdot 3 = 8$
x	$15,5 - 2,5 \cdot x$

Lämpötilan y ja ajan x välistä riippuvuutta kuvaava yhtälö on

$y = -2,5x + 15,5$.

b) Lasketaan aika x, kun klo on 22.00.

$x = 22.00 - 18.00 = 4$

Sijoitetaan aika $x = 4$ riippuvuutta kuvaavaan yhtälöön.

$y = -2,5 \cdot 4 + 15,5 = 5,5$ (°C)

c) Lämpötila alitti 9,5 °C, kun aikaa oli kulunut

$$y < 9,5$$

$$15,5 - 2,5x < 9,5$$

$$x > 2,4 \text{ (h)} = 2 \text{ (h)} \ (0,4 \cdot 60) \text{ min} = 2 \text{ (h)} \, 24 \text{ (min)}$$

Lasketaan, kuinka paljon kello oli.

$$18.00 + 2 \text{ (h)} \ 24 \, (\text{min}) = 20.24$$

Lämpötila alitti 9,5 °C kello 20.24 jälkeen.

11.

a) Muodostetaan malli.

Matka (km)	**Polttoainemäärä (l)**
0	75
1	$75 - 0{,}07$
2	$75 - 0{,}07 \cdot 2 = 74{,}86$
100	$75 - 0{,}07 \cdot 100 = 68$
x	$75 - 0{,}07 \cdot x$

Polttoaineen määrän y ja ajettujen kilometrien x välistä riippuvuutta kuvaava yhtälö on

$$y = -0{,}07x + 75 \text{ (l)}$$

b) Sijoitetaan $x = 150$ riippuvuutta kuvaavaan yhtälöön.

$$y = -0{,}07 \cdot 150 + 75 = 64{,}5 \text{ (l)}$$

c) Sijoitetaan $y = 51$ riippuvuutta kuvaavaan yhtälöön.

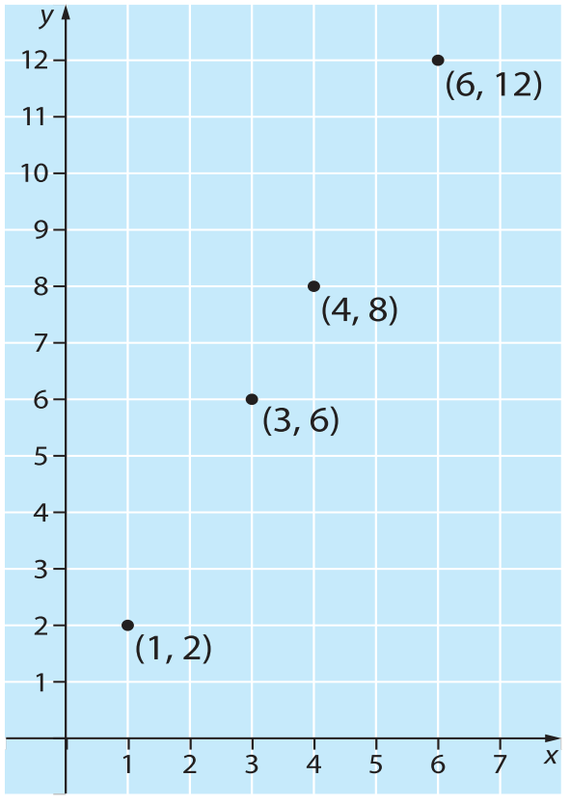
$$51 = -0{,}07x + 75$$
$$x = 342{,}8571... \text{ (km)} \approx 340 \text{ (km)}$$

d) Sijoitetaan $y = 0$ riippuvuutta kuvaavaan yhtälöön.

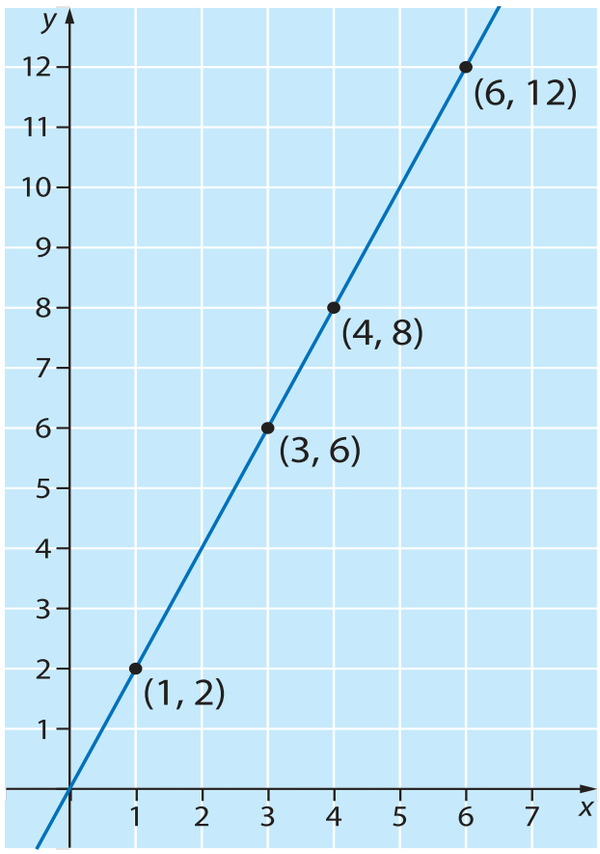
$$0 = -0{,}07x + 75$$
$$x = 1071{,}42857... \text{ (km)} \approx 1071 \text{ (km)}$$

12.

a) Koska munien lukumäärä on riippuvainen syötettyjen toukkien lukumäärästä, pisteiden y-koordinaatteina on munien lukumäärä ja x-koordinaatteina vastaavan syötettyjen toukkien lukumäärä. Merkitään pisteet koordinaatistoon.



b) Sovitetaan pistejoukkoon suora.



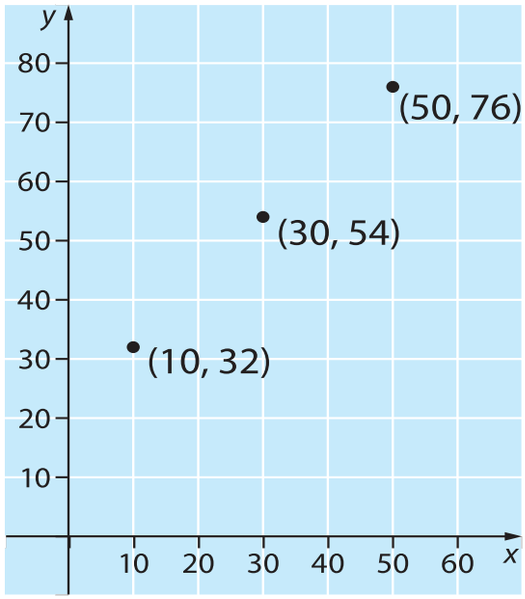
Suoran yhtälö saadaan teknisen apuvälineen avulla.

$y = 2x$

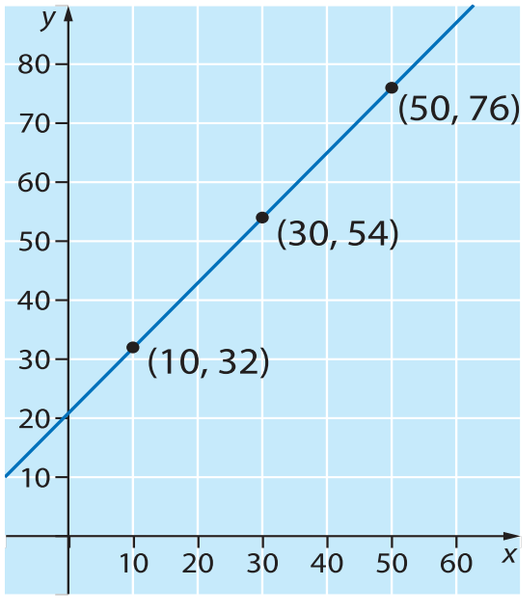
c) Liskolle voi antaa ruokintakerralla enintään 10 ja vähintään 0 toukkaa. Malli on pätevä, kun toukkien määrä on enintään 10 ja vähintään 0, eli $0 \le x \le 10$ (kpl).

13.

a) Merkitään pisteet koordinaatistoon.



b)



Suoran yhtälö saadaan teknisen apuvälineen avulla.

$y = 1{,}1x + 21\,(°\mathrm{C})$

c) Malli on pätevä tutkitun 50 minuutin lämmityksen ajan, eli $0 \le x \le 50$ (min) .

Saunan lämpötila lämmityksen alussa on

$$y = \frac{11}{10} \cdot 0 + 21 = 21\,(°\mathrm{C})$$

14.

a) Piste B

- on 15 cm korkeammalla kuin piste A eli *y*-koordinaatti on $\frac{0\text{ cm} + 15\text{ cm}}{10\text{ cm}} = 1,5$
- on leveys suunnassa 42 cm:n päässä pisteestä A, joten sen *x*-koordinaatti on $\frac{0\text{ cm} + 42\text{ cm}}{10\text{ cm}} = 4,2$
- koordinaatit ovat (4,2; 1,5).

Piste C

- on 15 cm korkeammalla kuin piste B eli *y*-koordinaatti on $\frac{15\text{ cm} + 15\text{ cm}}{10\text{ cm}} = 3$
- on leveys suunnassa 42 cm:n päässä pisteestä B, joten sen *x*-koordinaatti on $\frac{42\text{ cm} + 42\text{ cm}}{10\text{ cm}} = 8,4$
- koordinaatit ovat (8,4; 3).

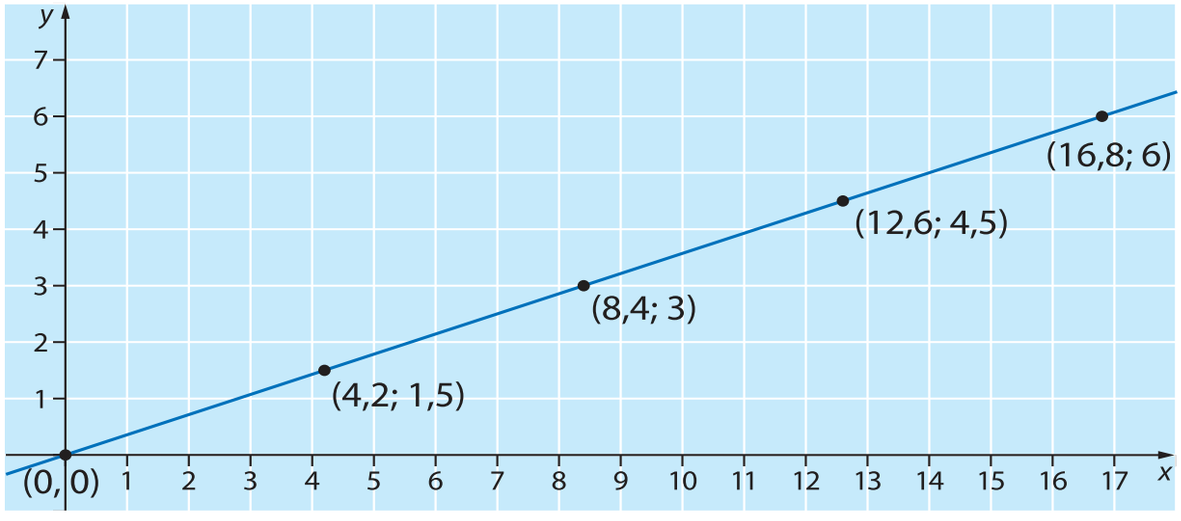
Piste D

- on 15 cm korkeammalla kuin piste C eli *y*-koordinaatti on $\frac{30\text{ cm} + 15\text{ cm}}{10\text{ cm}} = 4,5$
- on leveys suunnassa 42 cm:n päässä pisteestä C, joten sen *x*-koordinaatti on $\frac{84\text{ cm} + 42\text{ cm}}{10\text{ cm}} = 12,6$
- koordinaatit ovat (12,6; 4,5).

Piste E

- on 15 cm korkeammalla kuin piste D eli y-koordinaatti on $\frac{45\text{ cm}+15\text{ cm}}{10\text{ cm}}=6$
- on leveys suunnassa 42 cm:n päässä pisteestä D, joten sen x-koordinaatti on $\frac{126\text{ cm}+42\text{ cm}}{10\text{ cm}}=16,8$
- koordinaatit ovat (16,8; 6).

b)



Suoran yhtälö saadaan teknisen apuvälineen avulla.

$y=0,3571428...x\approx 0,36x$

15.

Koska kokonaiskustannukset riippuvat tuntimäärästä, merkitään tuntimäärää kirjaimella x (h) ja kokonaiskustannuksia kirjaimella y (€).

a) Muodostetaan malli tutkimalla kokonaiskustannusta taulukon avulla.

Tuntimäärä (h)	**Kokonaiskustannukset (€)**
1	$200 + 32 = 232$
2	$200 + 32 \cdot 2 = 264$
3	$200 + 32 \cdot 3 = 296$
x	$200 + 32 \cdot x$

Riippuvuutta kuvaava yhtälö on

$y = 32x + 200$.

b) Sijoitetaan $x = 2{,}5$ riippuvuutta kuvaavaan yhtälöön.

$y = 32 \cdot 2{,}5 + 200 = 280$ (€)

c) Sijoitetaan $y = 344$ riippuvuutta kuvaavaan yhtälöön ja ratkaistaan x.

$344 = 32x + 200$

$x = 4{,}5$ (h)

16.

a) Muutetaan annetut arvot saman nimisiksi, 0,8 dl = 0,08 l. Muodostetaan malli.

Aika (h)	**Tilavuus (l)**
0	10
1	$10-0,08=9,92$
2	$10-0,08\cdot 2=9,84$
t	$10-0,08\cdot t$

Riippuvuutta kuvaava yhtälö on

$y=-0,08t+10$.

b) Sijoitetaan $t = 5$ riippuvuutta kuvaavaan yhtälöön.

$y=-0,08\cdot 5+10=9,6\,(\text{l})$

c) Sijoitetaan $y = 0$ riippuvuutta kuvaavaan yhtälöön ja ratkaistaan t.

$0=-0,08t+10$

$t=125\,(\text{h})$

17.

Koska henkilön massa riippuu henkilön pituudesta, merkitään henkilön massaa kirjaimella y ja henkilön pituutta kirjaimella x.

a) Muutetaan 1,8 m senttimetreiksi. 1,8 m = 180 cm. Sijoitetaan $x = 180$ riippuvuutta kuvaavaan yhtälöön.

$$y = 0,875 \cdot 180 - 76 = 81,5 \text{ (kg)}$$

b) Sijoitetaan $y = 70$ riippuvuutta kuvaavaan yhtälöön ja ratkaistaan x.

$$70 = 0,875x - 76$$
$$x = 166,8571... \text{(cm)} \approx 167 \text{ (cm)}$$

c) Sijoitetaan $x = 52$ riippuvuutta kuvaavaan yhtälöön.

$$y = 0,875 \cdot 52 - 76 = -30,5 \text{ (kg)}$$

Malli ei ole pätevä vauvoille, sillä niiden painoiksi tulee negatiivinen luku, mikä ei ole mahdollista.

18.

Koska kokeen arvosana riippuu pistemäärästä, merkitään pistemäärää kirjaimella x (h) ja arvosanaa kirjaimella y (€).

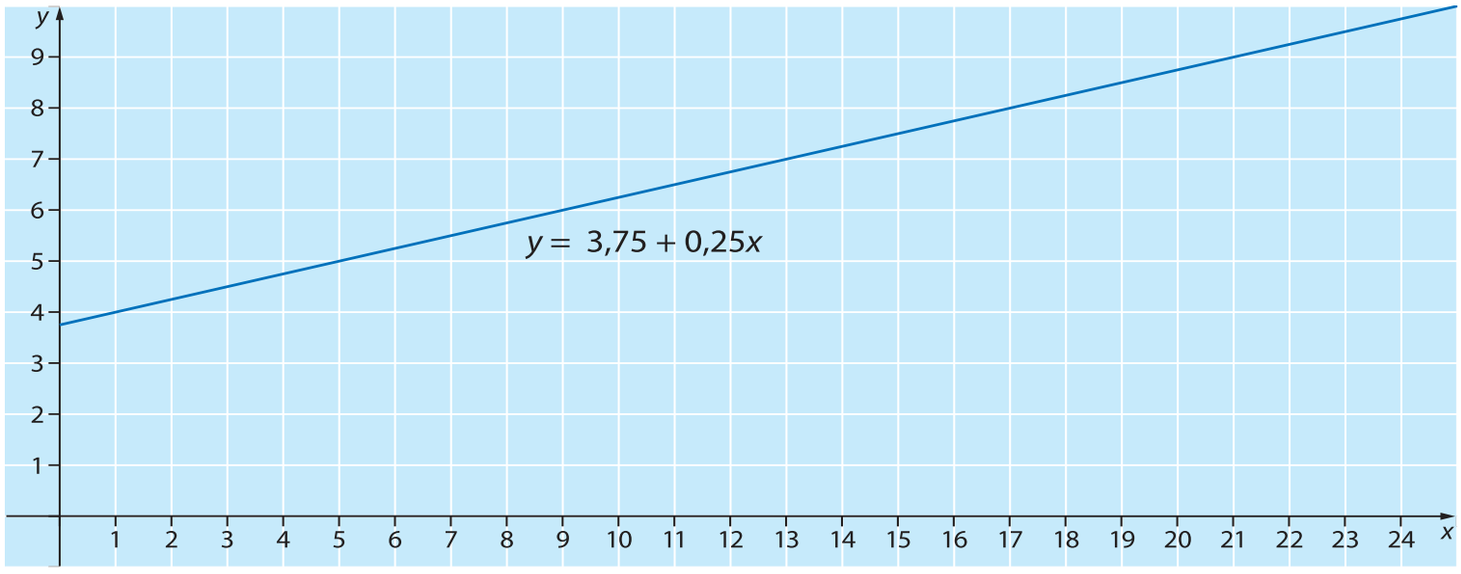
a) Muodostetaan malli.

Pistemäärä (kpl)	**Arvosana**
0	$3,75$
1	$3,75 + 0,25$
2	$3,75 + 0,25 \cdot 2$
x	$3,75 + 0,25 \cdot x$

Riippuvuutta kuvaava yhtälö on

$y = 0,25x + 3,75$.

Piirretään kuvaaja teknisen apuvälineen avulla.



b) Sijoitetaan pistemäärä $x = 15$ riippuvuutta kuvaavaan yhtälöön.

$$y = 0,25 \cdot 15 + 3,75 = 7,5$$

c) Sijoitetaan arvosana $y = 10$ riippuvuutta kuvaavaan yhtälöön ja ratkaistaan pistemäärä x.

$$10 = 0,25x + 3,75$$
$$x = 25$$

19.

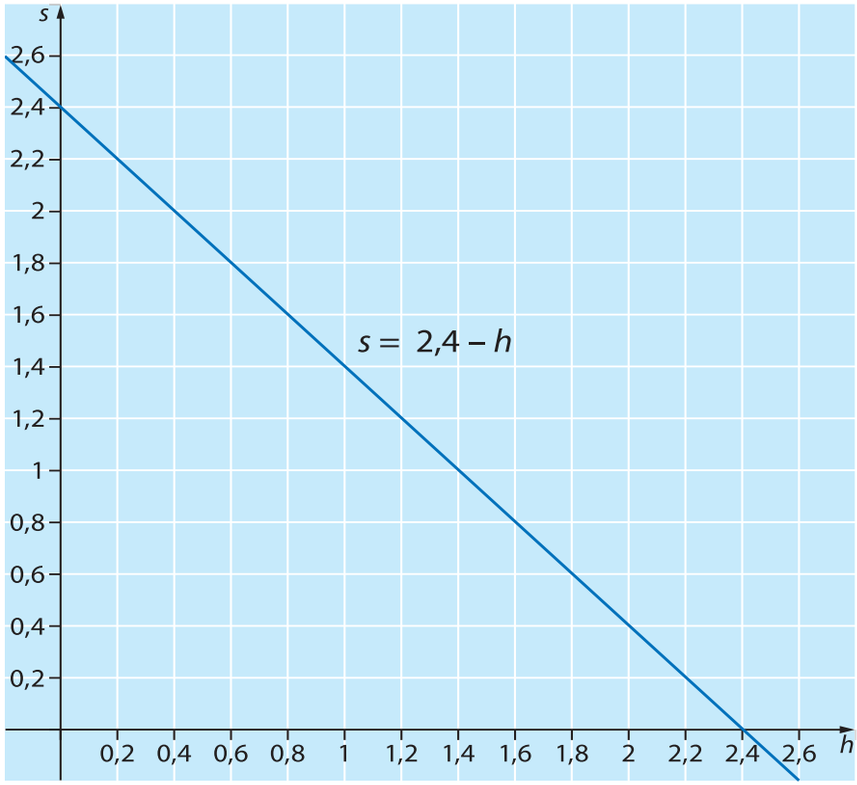
a) Muodostetaan malli.

Korkeus (m)	**Pohjasärmä (m)**
0,5	$2{,}4 - 0{,}5 = 1{,}9$
1	$2{,}4 - 1 = 1{,}4$
1,5	$2{,}4 - 1{,}5 = 0{,}9$
h	$2{,}4 - h$

Riippuvuutta kuvaava yhtälö on

$s = 2{,}4 - h$ (m).

b) Piirretään kuvaaja teknisen apuvälineen avulla.



c) Korkeus pitää olla suurempi kuin 0 ja pienempi kuin 2,4, eli
$0 < h < 2{,}4$ (m).

d) Muutetaan 65 cm metreiksi: 65 cm = 0,65 m.

Sijoitetaan $s = 0{,}65$ riippuvuutta kuvaavaan kaavaan ja ratkaistaan korkeus h.

$$0{,}65 = 2{,}4 - h$$
$$h = 1{,}75 \text{ (m)}$$

1.2 Suoran yhtälö

20.

a) Suoran $y = 7x - 4$ yhtälö on ratkaistussa muodossa.

Suoran kulmakerroin k on 7.

Koska $k > 0$, niin suora $y = 7x - 4$ on nouseva suora.

b) Suoran $y = -x - 4$ yhtälö on ratkaistussa muodossa.

Suoran kulmakerroin k on -1.

Koska $k < 0$, niin suora $y = -x - 4$ on laskeva suora.

c) Suoran $y = -\frac{1}{3}x$ yhtälö on ratkaistussa muodossa.

Suoran kulmakerroin k on $-\frac{1}{3}$.

Koska $k < 0$, niin suora $y = -\frac{1}{3}x$ on laskeva suora.

21.

a) Suoran $y = -x - 2$ on ratkaistussa muodossa.

Suoran vakiotermi b on -2.

Suora leikkaa y-akselin pisteessä $(0, -2)$.

b) Suoran $y = \frac{2}{3}x$ on ratkaistussa muodossa.

Suoran vakiotermi b on 0.

Suora leikkaa y-akselin pisteessä $(0, 0)$.

c) Suoran $y = 6$ on ratkaistussa muodossa.

Suoran vakiotermi b on 6.

Suora leikkaa y-akselin pisteessä $(0, 6)$.

22.

a) Suora $y = -0,5x + 3,6$ on ratkaistussa muodossa.

Suoran kulmakerroin k on $-0,5$.

Koska $k < 0$, niin suora on laskeva suora.

b) Muutetaan suoran yhtälö ratkaistuun muotoon.

$$3x = 2 - y$$
$$y = -3x + 2$$

Suoran kulmakerroin k on -3.

Koska $k < 0$, niin suora on laskeva suora.

c) Muutetaan suoran yhtälö ratkaistuun muotoon.

$$6x - y = 0$$
$$y = 6x$$

Suoran kulmakerroin k on 6.

Koska $k > 0$, niin suora on nouseva suora.

23.

a) Valitaan suoralta kaksi pistettä, (−1, 2) ja (0, 0).

Kulmakerroin

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 2}{0 - (-1)} = \frac{-2}{1} = -2$$

Koska $k < 0$, niin suora on laskeva suora.

b) Valitaan suoralta kaksi pistettä, (0, −1) ja (1, 2).

Kulmakerroin

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - (-1)}{1 - 0} = \frac{3}{1} = 3$$

Koska $k > 0$, niin suora on nouseva suora.

24.

a) Lasketaan ensin suoran kulmakerroin k.

Valitaan pisteeksi $(x_1, y_1) = (-5, 0)$ ja $(x_2, y_2) = (1, 6)$.

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6 - 0}{1 - (-5)} = \frac{6}{6} = 1$$

Koska kulmakerroin $k = 1$ on positiivinen luku, suora on nouseva suora.

b) Lasketaan ensin suoran kulmakerroin k.

Valitaan pisteeksi $(x_1, y_1) = (2, 5)$ ja $(x_2, y_2) = (4, -7)$.

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-7 - 5}{4 - 2} = \frac{-12}{2} = -6$$

Koska kulmakerroin $k = -6$ on negatiivinen luku, suora on laskeva suora.

25.

a) Valitaan pisteeksi $(x_1, y_1) = (-5, 2)$ ja $(x_2, y_2) = (3, -6)$.

Kulmakerroin on

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-6 - 2}{3 - (-5)} = \frac{-8}{8} = -1$$

b) Valitaan pisteeksi $(x_1, y_1) = (-6, 8)$ ja $(x_2, y_2) = (-1, 8)$.

Kulmakerroin on

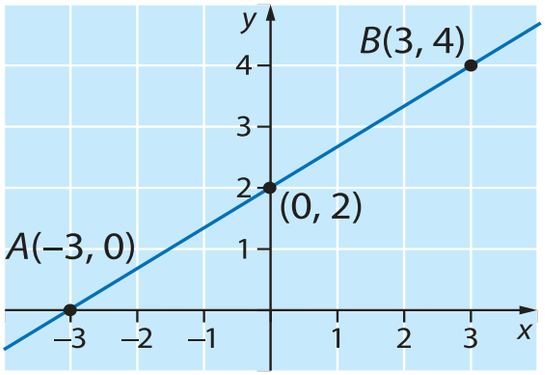
$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8 - 8}{-1 - (-6)} = \frac{0}{5} = 0$$

26.

a) Kulmakerroin

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 0}{3 - (-3)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

b) Kuvaajasta nähdään y-akselin leikkauspiste (0, 2).



c) Suoran yhtälö voidaan muodostaa kulmakertoimen ja vakiotermin avulla.

- Suoran kulmakertoimeksi määritettiin $k = \frac{2}{3}$.
- Koska y-akselin leikkauspiste on (0, 2), vakiotermin on $b = 2$.

Suoran yhtälö on

$$y = kx + b$$

$$y = \frac{2}{3}x + 2$$

27.

a) Suoran yhtälö voidaan muodostaa kulmakertoimen ja vakiotermin avulla.

- Suoran kulmakerroin on $k = -5$.
- Koska y-akselin leikkauspiste on $(0, -3)$, vakiotermin on $b = -3$.

Suoran yhtälö on

$$y = kx + b$$
$$y = -5x - 3$$

b) Suoran yhtälö voidaan muodostaa kulmakertoimen ja vakiotermin avulla.

- Suoran kulmakerroin on $k = 0$.
- Koska y-akselin leikkauspiste on $(0, 1)$, vakiotermin on $b = 1$.

Suoran yhtälö on

$$y = kx + b$$
$$y = 0x + 1$$
$$y = 1$$

28.

a) Muutetaan suoran yhtälö ratkaistuun muotoon.

$$y - 4x + 3 = 0$$
$$y = 4x - 3$$

Suoran kulmakerroin $k = 4$ ja y-akselin leikkauspiste on $(0, -3)$.

b) Muutetaan suoran yhtälö ratkaistuun muotoon.

$$y + \frac{3}{5}x - 2 = 0$$
$$y = -\frac{3}{5}x + 2$$

Suoran kulmakerroin $k = -\frac{3}{5}$ ja y-akselin leikkauspiste on $(0, 2)$.

c) Muutetaan suoran yhtälö ratkaistuun muotoon.

$$-2y + 6x - 1 = 0$$
$$2y = 6x - 1 \qquad \big| : 2$$
$$y = 3x - \frac{1}{2}$$

Suoran kulmakerroin $k = 3$ ja y-akselin leikkauspiste on $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$.

d) Muutetaan suoran yhtälö ratkaistuun muotoon.

$$y + 5 = 0$$
$$y = -5$$

Suoran kulmakerroin on 0 ja y-akselin leikkauspiste on $(0, -5)$.

29.

a) Suoran ja x-akselin leikkauspisteessä $y = 0$, jolloin sijoittamalla saadaan

$$\begin{aligned} 5x - 0 + 1 &= 0 \\ 5x &= -1 \qquad \big| : 5 \\ x &= -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

Piste, jossa suora leikkaa x-akselin, on $\left(-\frac{1}{5}, 0 \right)$.

Suoran ja y-akselin leikkauspisteessä $x = 0$, jolloin sijoittamalla saadaan

$$\begin{aligned} 5 \cdot 0 - y + 1 &= 0 \\ 0 - y + 1 &= 0 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

Piste, jossa suora leikkaa y-akselin on (0, 1).

b) Tutkitaan, onko piste (2, 11) suoralla sijoittamalla pisteen koordinaatit yhtälöön.

$$\begin{aligned} 5 \cdot 2 - 11 + 1 &= 0 \\ 10 - 11 + 1 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Saatu väite on tosi, joten piste on suoralla.

30.

a) Suoran ja x-akselin leikkauspisteessä $y = 0$, jolloin sijoittamalla saadaan

$$\begin{aligned} 0 &= 3x - 15 \\ 3x &= 15 \qquad \big| : 3 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Piste, jossa suora leikkaa x-akselin, on (5, 0).

Suoran ja y-akselin leikkauspisteessä $x = 0$, jolloin sijoittamalla saadaan

$$\begin{aligned} y &= 3 \cdot 0 - 15 \\ y &= -15 \end{aligned}$$

Piste, jossa suora leikkaa y-akselin on (0, −15).

b) Suoran ja x-akselin leikkauspisteessä $y = 0$, jolloin sijoittamalla saadaan

$$\begin{aligned} 0 &= -5x \qquad \big| : (-5) \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Piste, jossa suora leikkaa x-akselin, on (0, 0).

Suoran ja y-akselin leikkauspisteessä $x = 0$, jolloin sijoittamalla saadaan

$$\begin{aligned} y &= -5 \cdot 0 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

Piste, jossa suora leikkaa y-akselin on (0, 0).

c) Suoran ja x-akselin leikkauspisteessä $y = 0$, jolloin sijoittamalla saadaan

$$0 = -\frac{1}{2}x + 4$$

$$\frac{1}{2}x = 4 \qquad \left|\cdot 2\right.$$

$$x = 8$$

Piste, jossa suora leikkaa x-akselin, on (8, 0).

Suoran ja y-akselin leikkauspisteessä $x = 0$, jolloin sijoittamalla saadaan

$$y = -\frac{1}{2} \cdot 0 + 4$$

$$y = 4$$

Piste, jossa suora leikkaa y-akselin, on (0, 4).

31.

a) Muutetaan suoran yhtälö ratkaistuun muotoon.

$$x - 5y + 25 = 0$$
$$5y = x + 25 \qquad |:5$$
$$y = \frac{1}{5}x + 5$$

Suoran kulmakerroin $k = \frac{1}{5} > 0$, joten suora on nouseva suora.

b) Suoran ja x-akselin leikkauspisteessä $y = 0$, jolloin sijoittamalla saadaan

$$0 = \frac{1}{5}x + 5$$
$$\frac{1}{5}x = -5 \qquad |\cdot 5$$
$$x = -25$$

Piste, jossa suora leikkaa x-akselin, on $(-25, 0)$.

c) Suoran ja y-akselin leikkauspisteessä $x = 0$, jolloin sijoittamalla saadaan

$$y = \frac{1}{5} \cdot 0 + 5$$
$$y = 5$$

Piste, jossa suora leikkaa y-akselin, on $(0, 5)$.

32.

a) Suora leikkaa y-akselin kohdassa $y = 1$, joten vakiotermi $b = 1$ ja y-akselin leikkauspiste on (0, 1).

Nyt tiedetään suoralta kaksi pistettä, joten määritetään suoran kulmakerroin.

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-1}{-10-0} = \frac{5}{-10} = -\frac{1}{2}$$

Suoran ratkaistu muoto on $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

Suoran yleinen muoto on

$$y = -\frac{1}{2}x + 1$$

$$y + \frac{1}{2}x - 1 = 0 \qquad \big| \cdot 2$$

$$x + 2y - 2 = 0$$

b) Tutkitaan, onko piste (36, 20) suoralla sijoittamalla pisteen koordinaatit yhtälöön.

$$36 + 2 \cdot 20 - 2 = 0$$

$$36 + 40 - 2 = 0$$

$$74 = 0$$

Saatu väite on epätosi, joten piste (36, 20) ei ole suoralla.

33.

a) Suoran kulmakerroin $k = 1$. Merkitään suoralta tunnettua pistettä $(x_0, y_0) = (-6, 5)$.

Sijoitetaan kulmakerroin ja tunnetun pisteen koordinaatit yhtälöön $y - y_0 = k(x - x_0)$.

$$y - 5 = 1 \cdot (x - (-6))$$
$$y - 5 = 1 \cdot (x + 6)$$
$$y - 5 = x + 6$$
$$y = x + 11$$

b) Suoran kulmakerroin on $k = \frac{1}{3}$. Merkitään suoralta tunnettua pistettä $(x_0, y_0) = (-6, 5)$.

Sijoitetaan kulmakerroin ja tunnetun pisteen koordinaatit yhtälöön $y - y_0 = k(x - x_0)$.

$$y - 5 = \frac{1}{3} \cdot (x - (-6))$$
$$y - 5 = \frac{1}{3} \cdot (x + 6)$$
$$y - 5 = \frac{1}{3}x + 2$$
$$y = \frac{1}{3}x + 7$$

34.

a) Suoran kulmakerroin on $k = -\frac{1}{5}$.

Merkitään suoralta tunnettua pistettä $(x_0, y_0) = (1, -2)$.

Sijoitetaan kulmakerroin ja tunnetun pisteen koordinaatit yhtälöön $y - y_0 = k(x - x_0)$.

$$y - (-2) = -\frac{1}{5} \cdot (x - 1)$$

$$y + 2 = -\frac{1}{5}x + \frac{1}{5}$$

$$y = -\frac{1}{5}x - \frac{9}{5}$$

b) Suoran kulmakerroin on $k = -\frac{1}{5}$.

Merkitään suoralta tunnettua pistettä $(x_0, y_0) = (-5, -3)$.

Sijoitetaan kulmakerroin ja tunnetun pisteen koordinaatit yhtälöön $y - y_0 = k(x - x_0)$.

$$y - (-3) = -\frac{1}{5}(x - (-5))$$

$$y + 3 = -\frac{1}{5}(x + 5)$$

$$y + 3 = -\frac{1}{5}x - 1$$

$$y = -\frac{1}{5}x - 4$$

35.

a) Suoran kulmakerroin on $k = 5$.

Merkitään suoralta tunnettua pistettä $(x_0, y_0) = (-1, 12)$.

Sijoitetaan kulmakerroin ja tunnetun pisteen koordinaatit yhtälöön $y - y_0 = k(x - x_0)$.

$$\begin{aligned} y - 12 &= 5(x - (-1)) \\ y - 12 &= 5(x + 1) \\ y - 12 &= 5x + 5 \\ y &= 5x + 17 \end{aligned}$$

b) Lasketaan suoran kulmakerroin.

$$k = \frac{-5 - 15}{3 - 13} = \frac{-20}{-10} = 2$$

Valitaan tunnetuksi pisteeksi $(x_0, y_0) = (3, -5)$.

Sijoitetaan kulmakertoimen arvo ja sekä pisteen (3, −5) koordinaatit yhtälöön $y - y_0 = k(x - x_0)$.

$$\begin{aligned} y - (-5) &= 2(x - 3) \\ y + 5 &= 2x - 6 \\ y &= 2x - 11 \end{aligned}$$

c) Lasketaan suoran kulmakerroin.

$$k = \frac{-6-(-6)}{7-(-12)} = \frac{0}{19} = 0$$

Valitaan tunnetuksi pisteeksi $(x_0, y_0) = (7, -6)$.

Sijoitetaan kulmakertoimen arvo ja tunnetun pisteen koordinaatit yhtälöön $y - y_0 = k(x - x_0)$.

$$\begin{aligned} y-(-6) &= 0(x-7) \\ y+6 &= 0 \\ y &= -6 \end{aligned}$$

36.

a) Lasketaan suoran kulmakerroin.

$$k = \frac{10-(-8)}{13-4} = \frac{18}{9} = 2$$

Merkitään suoralta tunnettua pistettä $(x_0, y_0) = (4, -8)$.

Sijoitetaan kulmakerroin ja tunnetun pisteen koordinaatit yhtälöön $y - y_0 = k(x - x_0)$.

$$\begin{aligned} y-(-8) &= 2(x-4) \\ y+8 &= 2x-8 \\ y-2x+16 &= 0 \end{aligned}$$

b) Lasketaan suoran kulmakerroin.

$$k = \frac{6-5}{4-(-1)} = \frac{1}{4+1} = \frac{1}{5}$$

Merkitään suoralta tunnettua pistettä $(x_0, y_0) = (-1, 5)$.

Sijoitetaan kulmakerroin ja tunnetun pisteen koordinaatit yhtälöön $y - y_0 = k(x - x_0)$.

$$\begin{aligned}
y - 5 &= \frac{1}{5}(x - (-1)) \\
y - 5 &= \frac{1}{5}(x + 1) \\
y - 5 &= \frac{1}{5}x + \frac{1}{5} \qquad \Big| \cdot 5 \\
5y - 25 &= x + 1 \\
5y - x - 26 &= 0
\end{aligned}$$

37.

a) Koska piste (5, −13) on suoralla, pisteen koordinaatit toteuttavat suoran yhtälön $4ax - y - 7a = 0$.

$$\begin{aligned} 4a \cdot 5 - (-13) - 7a &= 0 \\ 20a + 13 - 7a &= 0 \\ 13a &= -13 \qquad \vert : 13 \\ a &= -1 \end{aligned}$$

Suoran t yhtälö saadaan, kun sijoitetaan $a = -1$ suoran t yhtälöön.

$$\begin{aligned} 4 \cdot (-1) \cdot x - y - 7 \cdot (-1) &= 0 \\ -4x - y + 7 &= 0 \end{aligned}$$

Määritetään suoran t yhtälön ratkaistu muoto, josta nähdään kulmakerroin.

$$\begin{aligned} -4x - y + 7 &= 0 \\ y &= -4x + 7 \end{aligned}$$

Suoran t kulmakerroin on $k = -4$.

b) Leikkauspiste on molemmilla suorilla, joten se toteuttaa molempien suorien yhtälöt. Leikkauspiste määritetään ratkaisemalla yhtälöpari

$$\begin{cases} y = -\frac{5}{2}x + 1 \\ y = -4x + 7 \end{cases}$$

$x = 4$ ja $y = -9$

Suorien leikkauspiste on (4, −9).

38.

a) Koska piste (12, −35) on suoralla, pisteen koordinaatit toteuttavat suoran yhtälön $2y - 7cx + 4c = 0$.

$$\begin{aligned} 2 \cdot (-35) - 7 \cdot c \cdot 12 + 4c &= 0 \\ -70 - 84c + 4c &= 0 \\ -80c &= 70 \qquad \big| : (-80) \\ c &= -\frac{7}{8} \end{aligned}$$

b) Koska piste (−18, 26) on suoralla, pisteen koordinaatit toteuttavat suoran yhtälön $2y - 7cx + 4c = 0$.

$$\begin{aligned} 2 \cdot 26 - 7 \cdot c \cdot (-18) + 4c &= 0 \\ 52 + 126c + 4c &= 0 \\ 130c &= -52 \qquad \big| : 130 \\ c &= -\frac{2}{5} \end{aligned}$$

39.

Suoran t kulmakerroin on $k = 4$. Merkitään suoralta tunnettua pistettä $(x_0, y_0) = (10, 37)$.

Sijoitetaan kulmakerroin ja tunnetun pisteen koordinaatit yhtälöön $y - y_0 = k(x - x_0)$.

$$\begin{aligned} y - 37 &= 4(x - 10) \\ y - 37 &= 4x - 40 \\ y &= 4x - 3 \end{aligned}$$

Määritetään suoran s yhtälön ratkaistu muoto.

$$\begin{aligned} 2x - 5y - 6 &= 0 \\ 5y &= 2x - 6 \quad \big| : 5 \\ y &= \frac{2}{5}x - \frac{6}{5} \end{aligned}$$

Leikkauspiste on molemmilla suorilla, joten se toteuttaa molempien suorien yhtälöt. Leikkauspiste määritetään ratkaisemalla yhtälöpari

$$\begin{cases} y = \frac{2}{5}x - \frac{6}{5} \\ y = 4x - 3 \end{cases}$$

$$x = \frac{1}{2} \text{ ja } y = -1$$

Suorien leikkauspiste on $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$.

40.

a) Suoran on nouseva, kun kulmakerroin $k > 0$.

$$\frac{1-(-11)}{-2a-(5a-3)} > 0$$

$$a < \frac{3}{7}$$

b) Suoran kulmakerroin on -3, kun

$$\frac{1-(-11)}{-2a-(5a-3)} = -3$$

$$a = 1$$

Kun $a = 1$, suora kulkee pisteiden $(2, -11)$, $(-2, 1)$ kautta. Koska kulmakerroin on $k = -3$, suoran yhtälöksi saadaan

$$y-1 = -3(x-(-2))$$
$$y-1 = -3x-6$$
$$y = -3x-5$$

41.

a) Suoran on laskeva, kun kulmakerroin $k < 0$.

$$\frac{3-(-7)}{(2a-1)-(4a)} < 0$$

$$a > -\frac{1}{2}$$

b) Suoran kulmakerroin on -15, kun

$$\frac{3-(-7)}{(2a-1)-(4a)} = -15$$

$$a = -\frac{1}{6}$$

42.

a) Valitaan suoralta kaksi pistettä, (0, −3) ja (2, 0). Lasketaan suoran kulmakerroin

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-(-3)}{2-0} = \frac{3}{2}$$

Merkitään suoralta tunnettua pistettä $(x_0, y_0) = (2, 0)$.

Sijoitetaan kulmakerroin ja tunnetun pisteen koordinaatit yhtälöön $y - y_0 = k(x - x_0)$.

$$y - 0 = \frac{3}{2}(x - 2)$$

$$\mathrm{y} = \frac{3}{2}x - \frac{6}{2}$$

$$y = \frac{3}{2}x - 3$$

b) Valitaan suoralta kaksi pistettä, (0, 1) ja (2, 0). Lasketaan suoran kulmakerroin

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-1}{2-0} = -\frac{1}{2}$$

Merkitään suoralta tunnettua pistettä $(x_0, y_0) = (2, 0)$.

Sijoitetaan kulmakerroin ja tunnetun pisteen koordinaatit yhtälöön $y - y_0 = k(x - x_0)$.

$$y - 0 = -\frac{1}{2}(x - 2)$$

$$y = -\frac{1}{2}x - \left(-\frac{2}{2}\right)$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 1$$

43.

a) Lasketaan suoran kulmakerroin.

$$k = \frac{21-33}{5-1} = \frac{-12}{4} = -3$$

Suora on laskeva, koska $k < 0$.

b) Lasketaan suoran kulmakerroin.

$$k = \frac{-12-2}{-20-8} = \frac{-14}{-28} = \frac{1}{2}$$

Suora on nouseva suora, koska $k > 0$.

44.

a) Suoran kulmakerroin on $k = -3$.

Merkitään suoralta tunnettua pistettä $(x_0, y_0) = (0, 4)$.

Sijoitetaan kulmakerroin ja tunnetun pisteen koordinaatit yhtälöön $y - y_0 = k(x - x_0)$.

$$\begin{aligned} y - 4 &= -3(x - 0) \\ y - 4 &= -3x \\ y &= -3x + 4 \end{aligned}$$

b) Suoran kulmakerroin on $k = -\frac{5}{3}$.

Merkitään suoralta tunnettua pistettä $(x_0, y_0) = (6, -7)$.

Sijoitetaan kulmakerroin ja tunnetun pisteen koordinaatit yhtälöön $y - y_0 = k(x - x_0)$.

$$\begin{aligned} y - (-7) &= -\frac{5}{3}(x - 6) \\ y + 7 &= -\frac{5}{3}x - \left(-\frac{30}{3}\right) \\ y + 7 &= -\frac{5}{3}x + 10 \\ y &= -\frac{5}{3}x + 3 \end{aligned}$$

c) Lasketaan suoran kulmakerroin.

$$k = \frac{32-5}{-3-(-12)} = \frac{27}{9} = 3$$

Merkitään suoralta tunnettua pistettä $(x_0, y_0) = (-12, 5)$.

Sijoitetaan kulmakerroin ja tunnetun pisteen koordinaatit yhtälöön $y - y_0 = k(x - x_0)$.

$$\begin{aligned} y-5 &= 3(x-(-12)) \\ y-5 &= 3(x+12) \\ y-5 &= 3x+36 \\ y &= 3x+41 \end{aligned}$$

45.

Leikkauspiste on molemmilla suorilla, joten se toteuttaa molempien suorien yhtälöt. Leikkauspiste määritetään ratkaisemalla yhtälöpari

$$\begin{cases} x - 3y + 3 = 0 \\ 3x - 10y + 1 = 0 \end{cases}$$

$x = -27$ ja $y = -8$

Tutkitaan, onko piste $(-27, -8)$ suoralla $y = -\frac{4}{3} - 44$ sijoittamalla pisteen koordinaatit yhtälöön.

$$-8 = -\frac{4}{3} \cdot (-27) - 44$$
$$-8 = -8$$

Saatu väite on tosi, joten piste $(-27, -8)$ on suoralla $y = -\frac{4}{3} - 44$.

46.

a) Suora on nouseva, kun kulmakerroin $k > 0$.

$$\frac{a+1-(4a-2)}{-1-3} > 0$$

$$a > 1$$

b) Suoran kulmakerroin $k = 6$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se.

$$\frac{a+1-(4a-2)}{-1-3} = 6$$

$$a = 9$$

Kun $a = 9$, suora kulkee pisteiden (3, 34), (−1, 10) kautta. Koska kulmakerroin on $k = 6$, suoran yhtälöksi saadaan

$$y-10 = 6(x-(-1))$$
$$y-10 = 6(x+1)$$
$$y-10 = 6x+6$$
$$y = 6x+16$$

1.3 Yhdensuoraisuus ja kohtisuoruus.

47.

Yhdensuuntaisilla suorilla on sama kulmakerroin, mutta eri vakiotermit. Yhdensuuntaisia suoria ovat:

- A ja D
- E ja C

48.

a) Yhdensuuntaisilla suorilla on sama kulmakerroin, mutta eri vakiotermit.
Suoran $y = 2x - 3$ kanssa yhdensuuntainen on esimerkiksi suora $y = 2x + 1$

b) Yhdensuuntaisilla suorilla on sama kulmakerroin, mutta eri vakiotermit.

Muutetaan suoran $x + y + 5 = 0$ yhtälö ratkaistuun muotoon.

$$x + y + 5 = 0$$
$$y = -x - 5$$

Suoran $y = -x - 5$ kanssa yhdensuuntainen on suora $y = -x + 5$.

c) Yhdensuuntaisilla suorilla on sama kulmakerroin, mutta eri vakiotermit.

Muutetaan suoran $3x - 4y + 8 = 0$ yhtälö ratkaistuun muotoon.

$$3x - 4y + 8 = 0$$
$$4y = 3x + 8 \quad \big| : 4$$
$$y = \frac{3}{4}x + 2$$

Suoran $y = \frac{3}{4}x + 2$ kanssa yhdensuuntainen on suora $y = \frac{3}{4}x + 1$.

49.

a) Suorat ovat yhdensuuntaiset, jos niiden kulmakertoimet ovat samat.

- Suoran $y = -\frac{1}{2}x + 3$ kulmakerroin on $k = -\frac{1}{2}$.
- Suoran $y = -2x + 3$ kulmakerroin on $k = -2$.

Kulmakertoimet ovat eri suuret, $-\frac{1}{2} \neq -2$, joten suorat eivät ole yhdensuuntaiset.

b) Määritetään suorien kulmakertoimet.

- Suoran $y = \frac{2}{5}x - 7$ kulmakerroin on $k = \frac{2}{5}$.
- Suoran $5y = 2x + 15$ kulmakerroin saadaan ratkaistusta muodosta

$$5y = 2x + 15 \quad \big| : 5$$
$$y = \frac{2}{5}x + 3$$

- Suoran $y = \frac{2}{5}x + 3$ kulmakerroin on $k = \frac{2}{5}$.

Kulmakertoimet ovat yhtä suuret, $\frac{2}{5} = \frac{2}{5}$, joten suorat ovat yhdensuuntaiset.

50.

a) Suorat ovat yhdensuuntaiset, jos niiden kulmakertoimet ovat samat.

- Suoran $y = x + 7$ kulmakerroin on $k = 1$.
- Suoran $y = -4x + 7$ Kulmakerroin on $k = -4$.

Kulmakertoimet ovat eri suuret, $1 \neq -4$, joten suorat eivät ole yhdensuuntaiset.

b) Suorat ovat yhdensuuntaiset, jos niiden kulmakertoimet ovat samat.

- Suoran $-x + 3y + 2 = 0$ kulmakerroin saadaan ratkaistusta muodosta

$$-x + 3y + 2 = 0$$
$$3y = x - 2 \qquad \big| : 3$$
$$y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$$

- Suoran $y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$ kulmakerroin on $k = \frac{1}{3}$.
- Suoran $y = -\frac{1}{3}x + 1$ kulmakerroin on $k = -\frac{1}{3}$

Kulmakertoimet ovat eri suuret, $-\frac{1}{3} \neq \frac{1}{3}$, joten suorat eivät ole yhdensuuntaiset.

c) Muutetaan kummatkin suoran yhtälöt ratkaistuun muotoon.

$$-6x + y = -5 \qquad\qquad -12x + 2y + 10 = 0$$
$$y = 6x - 5 \qquad\qquad 2y = 12x - 10 \qquad \vert : 2$$
$$y = 6x - 5$$

Suorat ovat yhdensuuntaiset, jos niiden kulmakertoimet ovat samat.

- Suoran $-6x + y = -5$ kulmakerroin on $k = 6$.
- Suoran $-12x + 2y + 10 = 0$ kulmakerroin on $k = 6$.

Kulmakertoimet ovat yhtä suuret, 6 = 6, joten suorat ovat yhdensuuntaiset.

51.

Määritetään suorien kulmakertoimet.

- Suoran *s* kulmakerroin on $k = -\frac{4}{5}$.

- Suoran *t* kulmakerroin on $k = \frac{-7-13}{3-28} = \frac{-20}{-25} = \frac{4}{5}$.

Koska suorien kulmakertoimet ovat eri suuret, $\frac{4}{5} \neq -\frac{4}{5}$, suorat ovat erisuuntaiset. Erisuuntaiset suorat leikkaavat toisensa.

52.

a) Yhdensuuntaisten suorien kulmakertoimet ovat samat, joten määritetään ensin suoran $-3y+2x-9=0$ kulmakerroin.

$$\begin{aligned} -3y+2x-9&=0\\ 3y&=2x-9 \qquad \big|:3\\ y&=\frac{2}{3}x-3 \end{aligned}$$

Kysytyn suoran kulmakerroin on siis $k=\frac{2}{3}$. Lisäksi tiedetään, että suora kulkee pisteen (6, 19) kautta. Muodostetaan suoran yhtälö.

$$\begin{aligned} y-19&=\frac{2}{3}(x-6)\\ y-19&=\frac{2}{3}x-4\\ y&=\frac{2}{3}x+15 \end{aligned}$$

b) Suorat ovat yhdensuuntaiset, jos niiden kulmakertoimet ovat samat.

Määritetään ensin suoran $-3y+5x-2=0$ kulmakerroin.

$$3y+5x-2=0$$
$$3y=-5x+2 \qquad |:3$$
$$y=-\frac{5}{3}x+\frac{2}{3}$$

Kysytyn suoran kulmakerroin on siis $k=-\frac{5}{3}$.

Suoran $y=-5cx+8$ kulmakerroin on $k=-5c$.

Merkitään kulmakertoimet yhtä suuriksi ja ratkaistaan yhtälö.

$$-5c=-\frac{5}{3} \qquad |:(-5)$$
$$c=-\frac{5}{3}\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)$$
$$c=\frac{1}{3}$$

53.

a) Yhdensuuntaisten suorien kulmakertoimet ovat samat.

Suoran $y = 2x + 3$ kulmakerroin on $k = 2$, joten kysytyn suoran kulmakerroin on sama.

Lisäksi tiedetään, että suora kulkee pisteen $(-16, 7)$ kautta.

Muodostetaan yhtälö.

$$y - 7 = 2(x - (-16))$$
$$y - 7 = 2(x + 16)$$
$$y - 7 = 2x + 32$$
$$y = 2x + 39$$

b) Yhdensuuntaisten suorien kulmakertoimet ovat samat, joten määritetään ensin suoran $-x+8y-24=0$ kulmakerroin.

$$-x+8y-24=0$$
$$8y=x+24 \qquad |:8$$
$$y=\frac{1}{8}x+3$$

Kysytyn suoran kulmakerroin on siis $k=\frac{1}{8}$.

Lisäksi tiedetään, että suora kulkee pisteen $(-16, 7)$ kautta.

Muodostetaan yhtälö.

$$y-7=\frac{1}{8}(x-(-16))$$
$$y-7=\frac{1}{8}(x+16)$$
$$y-7=\frac{1}{8}x+2$$
$$y=\frac{1}{8}x+9$$

54.

a) Yhdensuuntaisten suorien kulmakertoimet ovat samat, joten määritetään ensin suoran $-6ax + y - 13 = 0$ kulmakerroin.

$$-6ax + y - 13 = 0$$
$$y = 6ax + 13$$

Suoran $-6ax + y - 13 = 0$ kulmakerroin on $k = 6a$.

Suoran $y = -9x + 1$ kulmakerroin on $k = -9$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan vakio a.

$$6a = -9 \qquad \big| : 6$$
$$a = -\frac{9}{6} = -\frac{3}{2}$$

b) Yhdensuuntaisten suorien kulmakertoimet ovat samat, joten määritetään suoran $-6x+5y-3=0$ kulmakerroin.

$$-6x+5y-3=0$$
$$5y=6x+3 \qquad |:5$$
$$y=\frac{6}{5}x+\frac{3}{5}$$

Suoran $-6x+5y-3=0$ kulmakerroin on $k=\frac{6}{5}$.

Suoran $-6ax+y-13=0$ kulmakerroin on $k=6a$.

Merkitään kulmakertoimet yhtä suuriksi ja ratkaistaan yhtälö.

$$6a=\frac{6}{5} \qquad |:6$$
$$a=\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{6}$$
$$a=\frac{1}{5}$$

55.

a) Jos suorat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, kulmakertoimien tulo on -1.

- Suoran $y = -4x - 13$ kulmakerroin on $k = -4$.
- Suoran $y = 4x + 17$ kulmakerroin on $k = 4$.

Lasketaan kulmakertoimien tulo.

$4 \cdot (-4) = -16$

Koska tulo ei ole -1, suorat eivät ole kohtisuorassa.

b) Suorat ovat toistensa normaaleja, jos ne ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Kulmakertoimet nähdään suorien yhtälöiden ratkaistuista muodoista.

$$7x + 5y - 20 = 0$$
$$5y = -7x + 20 \qquad |:5$$
$$y = -\frac{7}{5}x + 4$$

Suoran $7x + 5y - 20 = 0$ kulmakerroin on $k = -\frac{7}{5}$.

$$-5x + 7y = 0$$
$$7y = 5x \qquad |:7$$
$$y = \frac{5}{7}x$$

Suoran $-5y + 7y = 0$ kulmakerroin on $k = \frac{5}{7}$.

Lasketaan kulmakertoimien tulo.

$$-\frac{7}{5} \cdot \frac{5}{7} = -1$$

Koska tulo on -1, suorat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan ja täten myös toistensa normaaleja.

56.

a) Jos suorat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, kulmakertoimien tulo on -1.

Lasketaan suorien *m* ja *n* kulmakertoimet.

Suora *n* kulkee pisteiden (0, 1) ja (−3, 2) kautta, joten suoran *n* kulmakerroin on

$$k = \frac{1-2}{0-(-3)} = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}.$$

Suora *m* kulkee pisteiden (0, 1) ja (1, 4) kautta, joten suoran *m* kulmakerroin on

$$k = \frac{1-4}{0-1} = \frac{3}{1} = 3.$$

Lasketaan kulmakertoimien tulo.

$$-\frac{1}{3} \cdot 3 = -\frac{3}{3} = -1$$

Koska tulo on -1, suorat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

b) Jos suorat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, kulmakertoimien tulo on -1.

Lasketaan suorien m ja n kulmakertoimet.

Suora n kulkee pisteiden $(0, 3)$ ja $(-5, 0)$ kautta, joten suoran n kulmakerroin on

$$k = \frac{3-0}{0-(-5)} = \frac{3}{5}.$$

Suora m kulkee pisteiden $(0, 1)$ ja $(-3, 5)$ kautta, joten suoran m kulmakerroin on

$$k = \frac{1-5}{0-(-3)} = \frac{-4}{3} = -\frac{4}{3}.$$

Lasketaan kulmakertoimien tulo.

$$-\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{5} = -\frac{12}{15} = -\frac{4}{5}$$

Koska tulo ei ole -1, suorat eivät ole kohtisuorassa toisiaan vastaan.

57.

a) Suoran $y = \frac{1}{3}x + 14$ kulmakerroin on $\frac{1}{3}$. Merkitään normaalin kulmakerrointa kirjaimella *k*.

Koska suorat ovat toistensa normaaleja, niiden kulmakertoimien tulo on -1

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä *k*.

$$\frac{1}{3} \cdot k = -1 \qquad \Big| : \frac{1}{3}$$
$$k = -3$$

Normaalin eli suoran *t* yhtälö on

$$y - (-3) = -3(x - (-9))$$
$$y + 3 = -3(x + 9)$$
$$y + 3 = -3x - 27$$
$$y = -3x - 30$$

b) Ratkaistusta muodosta nähdään *y*-akselin leikkauspiste $(0, -30)$.

Suoran ja *x*-akselin leikkauspisteessä *y*-koordinaatti on 0.

$$-3x - 30 = 0$$
$$-3x = 30 \qquad \Big| : (-3)$$
$$x = -10$$

Leikkauspiste on siis $(-10, 0)$.

58.

a) Suoran $y = -\frac{4}{3}x - 5$ kulmakerroin on $-\frac{4}{3}$. Merkitään normaalin kulmakerrointa kirjaimella *k*.

Koska suorat ovat toistensa normaaleja, niiden kulmakertoimien tulo on -1.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä *k*.

$$-\frac{4}{3} \cdot k = -1 \qquad \left| : \left(-\frac{4}{3} \right) \right.$$

$$k = \frac{3}{4}$$

Merkitään suoran *l* vakiotermiä kirjaimella *b*.

Tiedetään, että suora leikkaa *x*-akselin pisteessä $(-8, 0)$, joten suoran ja *x*-akselin leikkauspisteessä *y*-koordinaatti on 0 ja *x*-koordinaatti on -8.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä *b*.

$$\frac{3}{4} \cdot (-8) + b = 0$$

$$-6 + b = 0$$

$$b = 6$$

Suoran *l* yhtälö on $y = \frac{3}{4}x + 6$.

b) Suoran l ja y-akselin leikkauspiste kertoo suoran l vakiotermin, joka on $b = -25$.

Suoran l yhtälö on $y = \frac{3}{4}x - 25$.

59.

a) Suorien *n* ja *s* välinen kulma on 90°, joten suorat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Suoran *s* kulmakerroin saadaan ratkaistussa muodosta.

$$-3x + 4y - 2 = 0$$

$$4y = 3x + 2 \qquad \big| : 4$$

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$$

Suoran *s* kulmakerroin on $k = \frac{3}{4}$.

Merkitään suoran *n* kulmakerrointa kirjaimella *k*. Koska suorat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, niiden kulmakertoimien tulo on -1.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä *k*.

$$\frac{3}{4} \cdot k = -1 \qquad \Big| : \frac{3}{4}$$

$$k = -\frac{4}{3}$$

Suoran kulmakerroin on siis $k = -\frac{4}{3}$.

Lisäksi tiedetään, että suora kulkee pisteen (6, 5) kautta.

Muodostetaan yhtälö.

$$y-5=-\frac{4}{3}\cdot(x-6)$$

$$y-5=-\frac{4}{3}x+8$$

$$y=-\frac{4}{3}x+13$$

b) Sijoitetaan koordinaatit suoran *n* yhtälöön.

$$-83=-\frac{4}{3}\cdot 60+13$$

$$-83=-80+13$$

$$-83=67$$

Koska yhtälö on epätosi, piste (60, −83) ei ole suoralla *n*.

60.

a) Suoran *t* kulmakerroin on $-\frac{6}{5}$. Merkitään suoran *n* kulmakerrointa kirjaimella *k*.

Kohtisuorien suorien kulmakertoimien tulo on -1.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä *k*.

$$-\frac{6}{5}\cdot k = -1 \qquad \left| :\left(-\frac{6}{5}\right)\right.$$

$$k = \frac{5}{6}$$

Toisaalta suora *n* kulkee pisteiden $(-3, 5)$ ja $(2a + 1, -5)$ kautta, joten suoran *n* kulmakerroin on

$$k = \frac{-5-5}{2a+1-(-3)} = \frac{-10}{2a+4}$$

Tämän lausekkeen arvo pitää olla yhtä suuri kuin edellä määritelty kulmakertoimen arvo $k = \frac{5}{6}$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä *a*.

$$\frac{5}{6} = \frac{-10}{2a+4}$$

$$a = -8$$

b) Muodostetaan suoran *n* yhtälö.

$$y-5=\frac{5}{6}\cdot(x-(-3))$$

$$y=\frac{5}{6}x+\frac{45}{6}$$

Leikkauspiste ratkaistaan yhtälöparin avulla.

$$\begin{cases} y=\frac{5}{6}x+\frac{45}{6} \\ y=-\frac{6}{5}x-23 \end{cases}$$

$x=-15$ ja $y=-5$

Leikkauspiste on $(-15, -5)$.

61.

a) Suora s on suoran $y = 4x + 1$ suuntainen, joten niillä on sama kulmakerroin $k = 4$.

Muodostetaan suoran *s* yhtälö.

$$y - 6 = 4(x - 0)$$
$$y = 4x + 6$$

Suora *m* on kohtisuorassa suoraa $y = -2x + 1$ vastaan, joten niiden kulmakertoimien tulo on -1.

Suoran $y = -2x + 1$ kulmakerroin on -2. Merkitään suoran *m* kulmakerrointa kirjaimella *k*. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä *k*.

$$-2 \cdot k = -1 \qquad \big| : (-2)$$
$$k = \frac{1}{2}$$

Muodostetaan suoran *m* yhtälö.

$$y - 0 = \frac{1}{2}(x - (-5))$$
$$y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

Leikkauspiste ratkaistaan yhtälöparin avulla.

$$\begin{cases} y = 4x + 6 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \end{cases}$$

$x = -1$ ja $y = 2$

Leikkauspiste on $(-1, 2)$

b) Sijoitetaan pisteen koordinaatit suoran *m* yhtälöön.

$$4 = \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{5}{2}$$
$$4 = 4$$

Yhtälö on tosi, joten piste (3, 4) on suoralla *m*.

62.

a) Suoran $y = -7x + 1$ ja sen normaalin kulmakertoimien tulo on -1.

Suoran $y = -7x + 1$ kulmakerroin on -7. Merkitään normaalin kulmakerrointa kirjaimella *k*.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä *k*.

$$-7 \cdot k = -1$$

$$k = \frac{1}{7}$$

Normaali kulkee kuitenkin pisteiden $(-10, 21)$ ja $(c - 5, -1)$ kautta, joten sen kulmakerroin on.

$$k = \frac{-1 - 21}{c - 5 - (-10)} = \frac{-22}{c + 5}$$

Tämän lausekkeen arvo pitää olla yhtä suuri kuin edellä määritelty kulmakertoimen arvo $k = \frac{1}{7}$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä *c*.

$$\frac{1}{7} = \frac{-22}{c + 5}$$

$$c = -159$$

b) Muodostetaan normaalin yhtälö.

$$y - 21 = \frac{1}{7}(x - (-10))$$

$$-x + 7y - 157 = 0$$

c) Suorien leikkauspiste ratkaistaan yhtälöparin avulla.

$$\begin{cases} y = -7x + 1 \\ -x + 7y - 157 = 0 \end{cases}$$

$x = -3$ ja $y = 22$

63.

a) Suora l kulkee pisteiden (1, 1) ja (2, 3) kautta, joten suoran l kulmakerroin on

$$k = \frac{3-1}{2-1} = \frac{2}{1} = 2\,.$$

Määritetään suoran l kanssa yhdensuuntainen suora, joka kulkee pisteen $(-2, 2)$ kautta.

$$\begin{aligned} y-2 &= 2(x-(-2)) \\ y-2 &= 2(x+2) \\ y-2 &= 2x+4 \\ y &= 2x+6 \end{aligned}$$

b) Lasketaan suoran l kulmakerroin. Suora l kulkee pisteiden (0, 1) ja (2, 0) kautta, joten suoran l kulmakerroin on

$$k = \frac{0-1}{2-0} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Määritetään suoran l kanssa yhdensuuntainen suora, joka kulkee pisteen (1, 3) kautta.

$$\begin{aligned} y-3 &= -\frac{1}{2}(x-1) \\ y-3 &= -\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \\ y &= -\frac{1}{2}x+3\frac{1}{2} \end{aligned}$$

64.

a) Lasketaan suoran m kulmakerroin. Suora m kulkee pisteiden (0, 1) ja (−3, 3) kautta, joten kulmakerroin on

$$k = \frac{3-1}{-3-0} = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}.$$

Suoran m ja sen normaalin kulmakertoimien tulo on −1. Merkitään normaalin kulmakerrointa kirjaimella k.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä k.

$$-\frac{2}{3} \cdot k = -1 \qquad \left| : \left(-\frac{2}{3} \right) \right.$$

$$k = \frac{3}{2}$$

Muodostetaan normaalin yhtälö.

$$y - 4 = \frac{3}{2}(x - 2)$$

$$y - 4 = \frac{3}{2}x - 3$$

$$y = \frac{3}{2}x + 1$$

b) Lasketaan suoran *m* kulmakerroin. Suora *m* kulkee pisteiden (0, 1) ja (−3, 3) kautta.

$$k = \frac{3-1}{-3-0} = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}$$

Suoran *m* ja sen normaalin kulmakertoimien tulo on −1. Merkitään normaalin kulmakerrointa kirjaimella *k*.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä *k*.

$$-\frac{2}{3} \cdot k = -1 \qquad \left| : \left(-\frac{2}{3} \right) \right.$$

$$k = \frac{3}{2}$$

Muodostetaan normaalin yhtälö.

$$y - 0 = \frac{3}{2}(x - (-5))$$

$$y = \frac{3}{2}(x + 5)$$

$$y = \frac{3}{2}x + \frac{15}{2}$$

65.

a) Muutetaan suoran $4x-7y+3=0$ yhtälö ratkaistuun muotoon.

$$\begin{aligned} 4x-7y+3&=0 \\ 7y&=4x+3 \qquad \big|:7 \\ y&=\frac{4}{7}x+\frac{3}{7} \end{aligned}$$

Suoran $4x-7y+3=0$ kulmakerroin on $\frac{4}{7}$. Jotta suorat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, niiden kulmakertoimien tulo tulee olla -1.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan k.

$$\begin{aligned} \frac{4}{7}\cdot k&=-1 \qquad \Big|:\frac{4}{7} \\ k&=-\frac{7}{4} \end{aligned}$$

b) Muutetaan suoran $-x-5y+20=0$ yhtälö ratkaistuun muotoon.

$$-x-5y+20=0$$
$$5y=-x+20 \quad \big| :5$$
$$y=-\frac{1}{5}+4$$

Suoran $-x-5y+20=0$ kulmakerroin on $-\frac{1}{5}$.

Jotta suorat ovat yhdensuuntaiset, niiden kulmakertoimet tulee olla samat.
Suoran kulmakerroin *k* tulee olla $-\frac{1}{5}$.

66.

a) Koska suora *t* on yhdensuuntainen suoran $6x + y - 17 = 0$ kanssa, niillä on sama kulmakerroin.

Muutetaan suora $6x + y - 17 = 0$ ratkaistuun muotoon.

$$6x + y - 17 = 0$$
$$y = -6x + 17$$

Suoran $6x + y - 17 = 0$ kulmakerroin on $k = -6$.

Suora *t* kulkee myös pisteiden (0, −9) ja (2*c*, 15) kautta, joten sen kulmakerroin on.

$$k = \frac{15 - (-9)}{2c - 0} = \frac{24}{2c} = \frac{12}{c}$$

Tämän lausekkeen arvo pitää olla yhtä suuri kuin edellä määritelty kulmakertoimen arvo $k = -6$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä *c*.

$$-6 = \frac{12}{c}$$
$$c = -2$$

b) Suoran $y = -\frac{1}{2}x + 8$ kulmakerroin on $-\frac{1}{2}$.

Merkitään suoran *t* kulmakerrointa kirjaimella *k*. Kohtisuorien suorien kulmakertoimien tulo on -1. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä *k*.

$$-\frac{1}{2} \cdot k = -1 \qquad \left| : \left(-\frac{1}{2} \right) \right.$$

$$k = 2$$

Toisaalta suora *t* kulkee pisteiden $(0, -9)$ ja $(2c, 15)$ kautta, joten suoran *t* kulmakerroin on

$$k = \frac{15 - (-9)}{2c - 0} = \frac{24}{2c} = \frac{12}{c}.$$

Tämän lausekkeen arvo pitää olla yhtä suuri kuin edellä määritelty kulmakertoimen arvo $k = 2$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä *c*.

$$2 = \frac{12}{c}$$

$$c = 6$$

67.

a) Muutetaan suoran $-5ax+3y-22=0$ yhtälö ratkaistuun muotoon.

$$\begin{aligned} -5ax+3y-22&=0 \\ 3y&=5ax+22 \qquad \big|:3 \\ y&=\frac{5a}{3}x+\frac{22}{3} \end{aligned}$$

Suoran $-5ax+3y-22=0$ kulmakerroin on $\frac{5a}{3}$.

Suoran $y=\frac{1}{10}x-5$ kulmakerroin on $\frac{1}{10}$.

Suorat ovat toistensa normaaleja, joten niiden kulmakertoimien tulo on -1. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan a.

$$\begin{aligned} \frac{5a}{3}\cdot\frac{1}{10}&=-1 \\ a&=-6 \end{aligned}$$

b) Sijoitetaan saatu a:n arvo normaalin yhtälöön ja määritetään sen ratkaistu muoto.

$$y=\frac{5\cdot(-6)}{3}x+\frac{22}{3}$$

$$y=-10x+\frac{22}{3}$$

c) Sijoitetaan pisteen koordinaatit normaalin yhtälöön.

$$-9 = -10 \cdot 1 + \frac{22}{3}$$

$$-9 = -\frac{8}{3}$$

Saatu yhtälö on epätosi, joten piste (1, −9) ei ole normaalilla.

1.4 Sovelluksia lineaarisesta mallista.

68.

a) Muodostetaan suoran yhtälö annettujen pisteiden (34, 23) ja (−5, 75) avulla.

Lasketaan suoran kulmakerroin.

$$k = \frac{23 - 75}{34 - (-5)} = -\frac{4}{3}$$

Muodostetaan katua kuvaavan suoran yhtälö.

$$y - 23 = -\frac{4}{3}(x - 34)$$

$$y = -\frac{4}{3}x + \frac{205}{3}$$

b) Kirkon x-koordinaatti on −5 ja monumentin x-koordinaatti on 34.

Koska nähtävyydet sijaitsevat kadun päätepisteissä, suoran yhtälö on pätevä, kun $-5 \le x \le 34$.

c) Sijoitetaan metroaseman sisäänkäynnin koordinaatit katua kuvaavaan suoran yhtälöön.

$$27 = -\frac{4}{3} \cdot 30 + \frac{205}{3}$$

$$27 = 28\frac{1}{3}$$

Saatu yhtälö on epätosi, joten metroaseman sisäänkäynti ei ole kadulla.

69.

a) Suoran yhtälö muodostamiseen tarvitaan kaksi pistettä. Koska x on aika vuosina vuodesta 2009 alkaen, $x = 0$ tarkastelun alkuhetkellä eli vuonna 2009. Vuoteen 2013 mennessä on kulunut 4 vuotta alkuhetkestä, joten $x = 4$.

x (a)	y (kpl)	(x, y)
0	160	(0, 160)
4	208	(4, 208)

Suoran kulmakerroin

$$k = \frac{160 - 208}{0 - 4} = 12$$

Lisäksi valitaan tunnetuksi pisteeksi $(x_0, y_0) = (0, 160)$, joten suoran yhtälöksi saadaan

$$y - 160 = 12(x - 0)$$
$$y = 12x + 160$$

b) Vuoteen 2016 on kulunut 2009 − 2016 = 7 vuotta eli $x = 7$.

Susien kanta, kun $x = 7$, on

$$y = 12 \cdot 7 + 160 = 244 \text{ (kpl)}$$

c) Kulunut aika saadaan, kun susien määrä on $y = 250$.

$$250 = 12x + 160$$
$$x = 7,5$$

Susien määrä on 250 vuonna $2009 + 7,5 = 2016,5$. Susien määrä on yli 250 vuonna 2017.

70.

a) Suoran yhtälön muodostamiseen tarvitaan kaksi pistettä. Koska x on leveyspiiri, Tampereen leveyspiiri on $61{,}5°$, jolloin $x = 61{,}5$. Rovaniemi on leveyspiirissä $66{,}5°$, jolloin $x = 66{,}5$.

x (°)	y (min)	(x, y)
0	590	(61,5; 590)
5	500	(66,5; 500)

Suoran kulmakerroin

$$k = \frac{590 - 500}{61{,}5 - 66{,}5} = -18$$

Lisäksi valitaan tunnetuksi pisteeksi $(x_0, y_0) = (61{,}5; 590)$, joten suoran yhtälöksi saadaan

$$y - 590 = -18(x - 61{,}5)$$
$$y = -18x + 1\,697$$

b) Valoisan ajan määrä Kuopiossa saadaan, kun sijoitetaan $x = 62{,}9$.

$$y = -18 \cdot 62{,}9 + 1\,697 = 564{,}8 \approx 565 \text{ (min)}$$

c) Helsingin leveyspiiri tämän mallin perusteella saadaan, kun sijoitetaan suoran yhtälöön $y = 600$.

$$600 = -18x + 1\,697$$
$$x = 60{,}944... \approx 60{,}9°$$

71.

a) Suoran yhtälö muodostamiseen tarvitaan kaksi pistettä. Koska x on käytetty aika (min), $x = 30$, kun matkaa on kuljettu 37,5 km. Matkaa on kuljettu 60 km, kun aikaa on kulunut $x = 30 + 18 = 48$ min.

x (min)	y (km)	(x, y)
30	37,5	(30, 37,5)
48	60	(48, 60)

Suoran kulmakerroin on

$$k = \frac{37,5 - 60}{30 - 48} = \frac{5}{4}$$

Lisäksi valitaan tunnetuksi pisteeksi $(x_0, y_0) = (48, 60)$, joten suoran yhtälöksi saadaan

$$y - 60 = \frac{5}{4}(x - 48)$$

$$y = \frac{5}{4}x$$

b) Kulunut aika saadaan, kun sijoitetaan $y = 340$ suoran yhtälöön.

$$340 = \frac{5}{4}x$$

$$x = 272 \text{ (min)}$$

c) Muutetaan 2 tuntia minuuteiksi. 2 h = 120 min.

Kuljettu matka saadaan, kun sijoitetaan suoran yhtälöön $x = 120$.

$$y = \frac{5}{4} \cdot 120 = 150 \text{ (km)}$$

72.

a) Suoran yhtälö muodostamiseen tarvitaan kaksi pistettä. Koska x on aika vuosina vuodesta 1972 alkaen, $x = 0$ tarkastelun alkuhetkellä eli vuonna 1972. Vuoteen 2002 mennessä on kulunut 30 vuotta alkuhetkestä, joten $x = 30$. Miesten verenpainearvot:

x (a)	y (mmHg)	(x, y)
0	147	(0, 147)
30	137	(30, 137)

Suoran kulmakerroin

$$k = \frac{147 - 137}{0 - 30} = -\frac{1}{3}$$

Lisäksi valitaan tunnetuksi pisteeksi $(x_0, y_0) = (0, 147)$, joten suoran yhtälöksi saadaan

$$y - 147 = -\frac{1}{3}(x - 0)$$

$$y = -\frac{1}{3}x + 147$$

Miesten verenpaineen arvoa kuvaava suoran yhtälö on $y = -\frac{1}{3}x + 147$.

Naisten verenpainearvot:

x (a)	y (mmHg)	(x, y)
0	150	(0, 150)
30	133	(30, 133)

Suoran kulmakerroin

$$k = \frac{150-133}{0-30} = -\frac{17}{30}$$

Lisäksi valitaan tunnetuksi pisteeksi $(x_0, y_0) = (0, 150)$, joten suoran yhtälöksi saadaan

$$y - 150 = -\frac{17}{30}(x - 0)$$

$$y = -\frac{17}{30}x + 150$$

Naisten verenpaineen arvoa kuvaava suoran yhtälö on $y = -\frac{17}{30}x + 150$.

b) Sijoitetaan miesten verenpaineen arvoa kuvaavaan yhtälöön $y = 140$.

$$140 = -\frac{1}{3}x + 147$$

$$x = 21$$

Tarkastelun alkuhetki on 1972, joten miesten verenpaine on laskenut keskimäärin tasolle 140 mmHg vuonna 1972 + 21 = 1993.

c) Naisten keskimääräinen verenpaine vuonna 1998 saadaan sijoittamalla yhtälöön $x = 26$ (1998−1972).

$$y = -\frac{17}{30} \cdot 26 + 150 = 135,266 \approx 135 \text{ (mmHg)}$$

73.

a) Auton ja moottoripyörän nopeus lähtöhetkellä $x = 0$, jolloin nopeudet ovat

- auton alkunopeus: $y = 0,5 \cdot 0 + 20 = 20$ (m/s)
- moottoripyörän alkunopeus: $y = 0,64 \cdot 0 + 11,1 = 11,1$ (m/s)

Autolla on siis suurempi nopeus tarkastelun alkaessa.

b) Yhtälön $y = 0,5x + 20$ kulmakertoimesta $k = 0,5$ nähdään, että auton nopeus kasvaa tarkastelun alusta alkaen 0,5 m/s sekunnissa. Auton kiihtyvyys on $0,5 \text{ m/s}^2$.

Yhtälön $y = 0,64x + 11,1$ kulmakertoimesta $k = 0,64$ nähdään, että moottoripyörän nopeus kasvaa tarkastelun alusta alkaen 0,64 m/s sekunnissa. Moottoripyörän kiihtyvyys on $0,64 \text{ m/s}^2$.

Moottoripyörällä on suurempi kiihtyvyys.

c) Auto ja moottoripyörä kiihdyttävät samaan aikaan. Samassa nopeudessa auton ja moottoripyörän nopeuden lausekkeet ovat yhtä suuret. Merkitään nopeutta kuvaavat yhtälöt yhtä suuriksi ja ratkaistaan yhtälö.

$$0,64x + 11,1 = 0,5x + 20$$
$$x = 63,5714... \text{ (s)}$$
$$x \approx 64 \text{ (s)}$$

Kun on ajettu 64 s, auton ja moottoripyörän nopeus on

$y = 0,5 \cdot 64 + 20 = 52$ (m/s) .

74.

a) Yhtiön A perusmaksun suuruus saadaan, kun merkitään $x = 0$.

$y = 154,8 + 0,0048 \cdot 0 = 154,80\,(€)$

b) Sijoittamalla yhtiön B sopimuksen vuotuiseen kustannuksen yhtälöön $x = 1$, saadaan yhden kilowattitunnin hinta.

$y = 0,019 \cdot 1 = 0,019\ €$

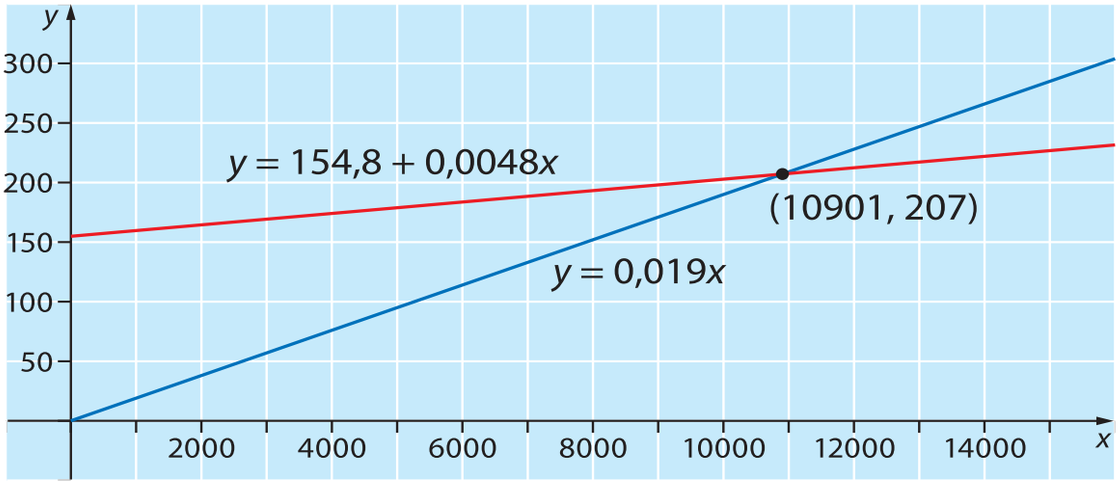
Yksi kilowattitunti maksaa 0,019 €.

c) Lasketaan kuinka monta kilowattituntia pitää kuluttaa sähköä, jotta vuotuiset kustannukset ovat samat. Merkitään yhtiöiden sopimuksien kustannukset samoiksi ja lasketaan x.

$$154,8 + 0,0048x = 0,019x$$

$$x = 10\,901,4084... \text{ (kWh)}$$

$$x \approx 10\,901 \text{ (kWh)}$$



Kun vuotuinen käyttömäärä on yli 10 901 kWh, yhtiön *A* sopimus on edullisempi.

75.

a)

- Liikuntakerhon perusmaksu saadaan sijoittamalla kustannuksia kuvaavaan yhtälöön $x = 0$ eli $y = 56 + 3,8 \cdot 0 = 56$ (€) .

- Askartelukerhon perusmaksu saadaan sijoittamalla kustannuksia kuvaavaan yhtälöön $x = 0$ eli $y = 35 + 4,5 \cdot 0 = 35$ (€) .

Liikuntakerhon perusmaksu on suurempi.

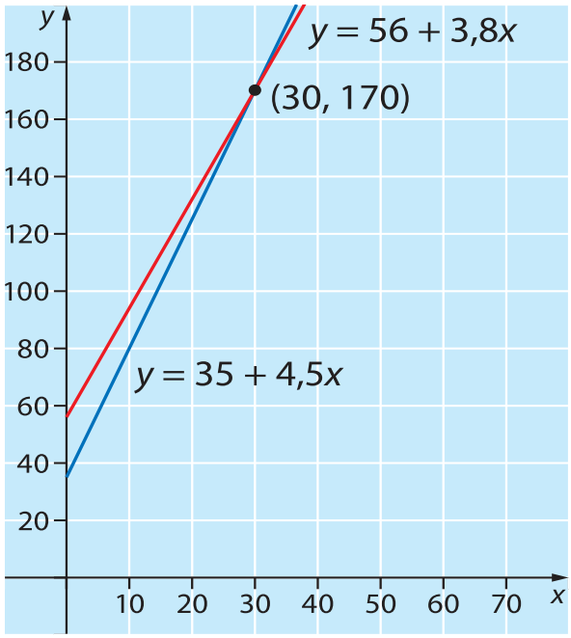
b) Yhtälön $y = 56 + 3,8x$ kulmakertoimesta $k = 3,8$ nähdään, että osallistumiskerta kasvattaa 3,8 € kustannuksia.

Yhtälön $y = 35 + 4,5x$ kulmakertoimesta $k = 4,5$ nähdään, että osallistumiskerta kasvattaa 4,5 € kustannuksia.

Osallistumiskerran yksikköhinta on halvempi liikuntakerhossa.

c) Lasketaan, mikä on osallistumiskertojen lukumäärä, jotta kerhojen vuotuiset kustannukset olisivat samat. Merkitään kustannuksia kuvaavat yhtälöt yhtä suuriksi ja lasketaan x.

$$56 + 3,8x = 35 + 4,5x$$
$$x = 30$$



Kerhojen vuotuiset kustannukset ovat samat, kun osallistumiskertoja on 30 kpl.

76.

a) Panun matka tiedetään kaksi pistettä.

- Lähtöhetkellä $x = 0$ Panu on kulkenut 0 m ($y = 0$). Panun lähtöpiste on siis (0, 0).

- 5 sekunnin kuluttua Panu on 7 m:n päässä lähtöpisteestä. Panun toinen tunnettu piste on (5, 7).

Lasketaan suoran kulmakerroin pisteitten avulla.

$$k = \frac{7-0}{5-0} = \frac{7}{5}$$

Muodostetaan suoran yhtälö.

$$y - 0 = \frac{7}{5}(x - 0)$$

$$y = \frac{7}{5}x$$

b) Lasketaan kuinka monta sekuntia pojilla kestää kävellä yhteensä 122 m. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x.

$$\frac{7}{5}x + 1,25x = 122$$

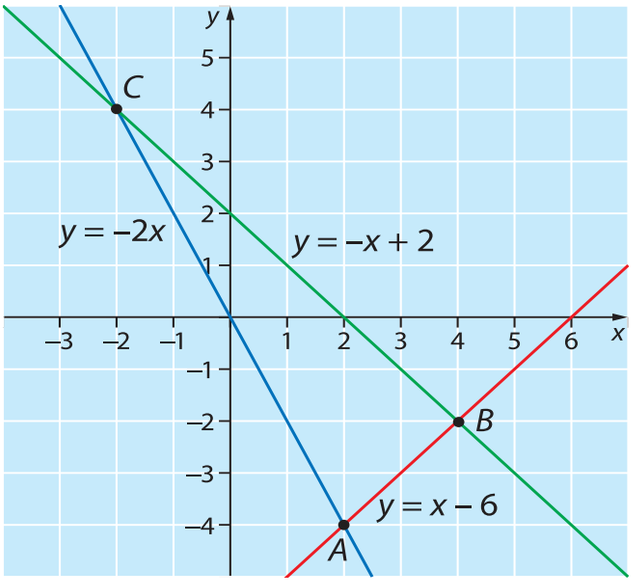
$$x = 46,0377\ldots (\text{s})$$

$$x \approx 46\ (\text{s})$$

46 sekunnin kuluttua pojat kohtaavat toisensa.

77.

a) Piirretään suorat samaan koordinaatistoon. Merkitään kolmion kärkipisteitä A, B ja C.



Kärkipisteet eli suorien leikkauspisteet saadaan ratkaisemalla kolme yhtälöparia.

Piste A

$$\begin{cases} y = x - 6 \\ y = -2x \end{cases}$$

$x = 2$ ja $y = -4$

Piste B

$$\begin{cases} y = x - 6 \\ y = -x + 2 \end{cases}$$

$x = 4$ ja $y = -2$

Piste C

$$\begin{cases} y = -2x \\ y = -x + 2 \end{cases}$$

$x = -2$ ja $y = 4$

Kärkipisteet ovat: $(2, -4)$, $(4, -2)$ ja $(-2, 4)$.

b) Kolmio on suorakulmainen, jos kaksi suorista on kohtisuorassa toisiaan vastaan. Tällöin suorien kulmakertoimien tulo on -1.

- Suoran $y = x - 6$ kulmakerroin on 1.
- Suoran $y = -x + 2$ kulmakerroin on -1.

Kulmakertoimien tulo on $1 \cdot (-1) = -1$ eli kolmio on siis suorakulmainen.

c) Kolmion kannan pituus on pisteiden $A(2, -4)$ ja $B(4, -2)$ etäisyys.

Kolmion kannan pituus:

$$\sqrt{(2-4)^2 + (-4-(-2))^2} = \sqrt{8}$$

Kolmion korkeus on pisteiden $B(4, -2)$ ja $C(-2, 4)$ etäisyys.

Kolmion korkeus:

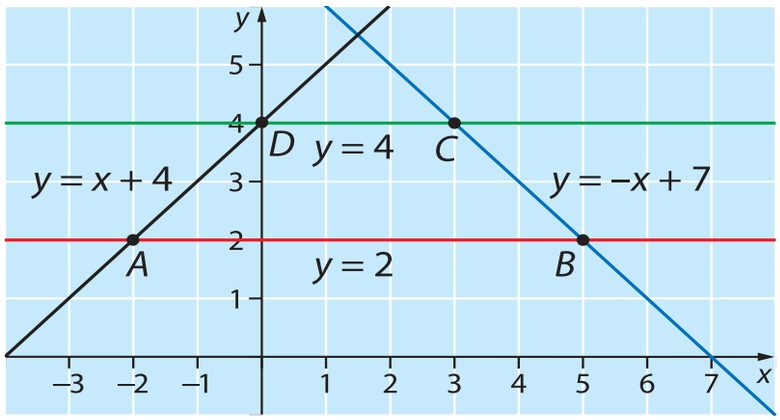
$$\sqrt{(4-(-2))^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{72}$$

Lasketaan kolmion pinta-ala.

$$A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{72} = 12$$

78.

a) Piirretään suorat samaan koordinaatistoon. Merkitään kolmion kärkipisteitä A, B, C ja D.



Kärkipisteet eli suorien leikkauspisteet saadaan ratkaisemalla neljä yhtälöparia.

Piste A

$$\begin{cases} y = x + 4 \\ y = 2 \end{cases}$$

$x = -2$ ja $y = 2$

Piste B

$$\begin{cases} y = 2 \\ y = -x + 7 \end{cases}$$

$x = 5$ ja $y = 2$

Piste C

$$\begin{cases} y = 4 \\ y = -x + 7 \end{cases}$$

$x = 3$ ja $y = 4$

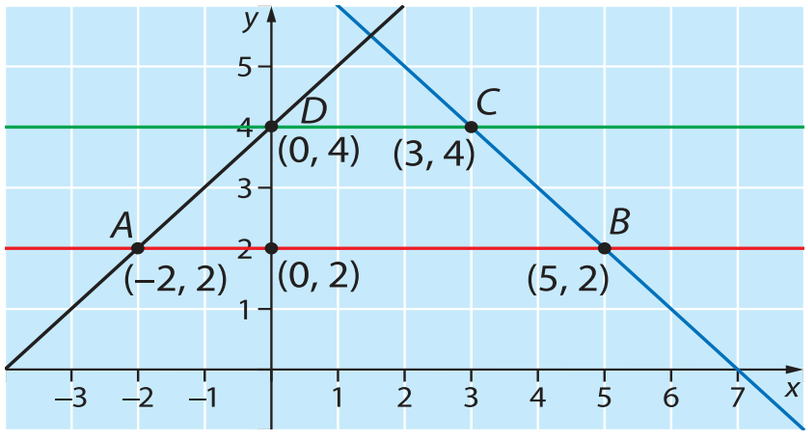
Piste D

$$\begin{cases} y = 4 \\ y = x + 4 \end{cases}$$

$x = 0$ ja $y = 4$

Kärkipisteet ovat: $(-2, 2)$, $(5, 2)$, $(3, 4)$ ja $(0, 4)$.

b) Nelikulmio on tasakylkinen puolisuunnikas.



Lasketaan pisteiden $A(-2, 2)$ ja $B(5, 2)$ etäisyys.

$$\sqrt{(-2-5)^2+(2-2)^2} = 7$$

Pisteiden A ja B etäisyys on 7 yksikköä eli $7 \cdot 10\ \text{m} = 70\ \text{m}$.

Lasketaan pisteiden $C(3, 4)$ ja $D(0, 4)$ etäisyys.

$$\sqrt{(3-0)^2+(4-4)^2} = 3$$

Pisteiden C ja D etäisyys on 3 yksikköä eli $3 \cdot 10\ \text{m} = 30\ \text{m}$.

Lasketaan puolisuunnikkaan korkeus h. Puolisuunnikkaan korkeus on suorien $y = 2$ ja $y = 4$ etäisyys. Lasketaan se pisteiden (0, 4) ja (0, 2) avulla.

$$\sqrt{(0-0)^2+(4-2)^2} = 2$$

Puolisuunnikkaan korkeus on 2 yksikköä eli $2 \cdot 10 \text{ m} = 20 \text{ m}$.

Lasketaan puolisuunnikkaan pinta-ala.

$$A = \frac{70 \text{ m} + 30 \text{ m}}{2} \cdot 20 \text{ m} = 1\,000 \text{ m}^2 = 10 \text{ a}$$

79.

a) Suora t on yhdensuuntainen suoran m kanssa, joten niiden kulmakertoimet ovat yhtä suuret.

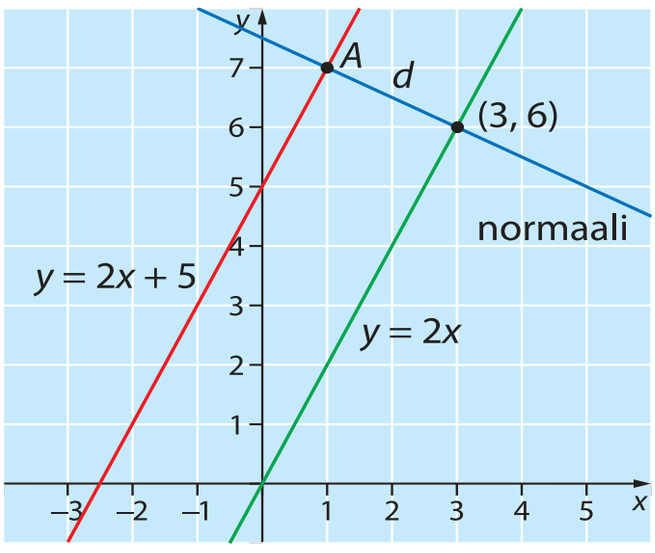
$k_t = k_m = 2$

Suora t kulkee pisteen (3, 6) kautta. Muodostetaan yhtälö.

$y - 6 = 2(x - 3)$

$y = 2x$

b) Piirretään kuva joesta. Joen leveys on suorien kohtisuora etäisyys. Piirretään pisteen (3, 6) kautta suoralle $y = 2x$ normaali n. Merkitään suoran ja sen normaalin leikkauspistettä kirjaimella A ja joen leveyttä kirjaimella d.



Joen leveys *d* on pisteiden (3, 6) ja *A* välinen etäisyys. Piste *A* on normaalilla, joten määritetään ensin normaalin yhtälö.

Koska suoran *t* kulmakerroin $k_t = 2$, niin normaalin *n* kulmakerroin $k_n = -\frac{1}{2}$. Muodostetaan normaalin yhtälö kulmakertoimen $k_n = -\frac{1}{2}$ ja pisteen (3, 6) avulla.

$$y - 6 = -\frac{1}{2}(x - 3)$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{15}{2}$$

Lasketaan suorien leikkauspisteen *A* koordinaatit yhtälöparin avulla.

$$\begin{cases} y = 2x + 5 \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{15}{2} \end{cases}$$

$x = 1$ ja $y = 7$

Leikkauspisteen *A* koordinaatit ovat (1, 7).

Lasketaan pisteiden *A*(1, 7) ja (3, 6) välinen etäisyys.

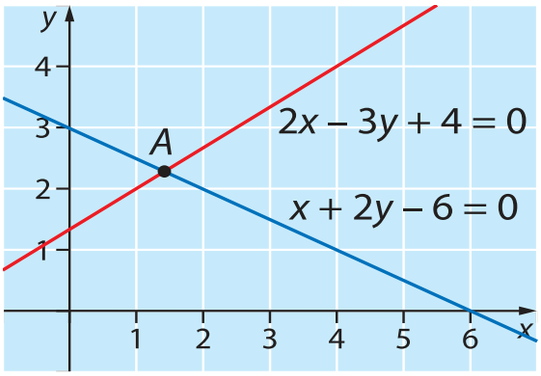
$$d = \sqrt{(1-3)^2 + (7-6)^2} = \sqrt{5} = 2,2360...$$

Koordinaattiyksikkö on 5 m, joten etäisyys on

$$2,2360... \cdot 5 \text{ m} = 11,180... \text{ m} \approx 11 \text{ m}$$

80.

a) Piirretään suorat samaan koordinaatistoon ja merkitään pistettä, jossa tiet eroavat, kirjaimella A.



Suorien leikkauspiste saadaan ratkaisemalla yhtälöpari

$$\begin{cases} 2x-3y+4=0 \\ x+2y-6=0 \end{cases}$$

$x=\frac{10}{7}$ ja $y=\frac{16}{7}$

Tiet eroavat pisteessä $\left(\frac{10}{7},\frac{16}{7}\right)$.

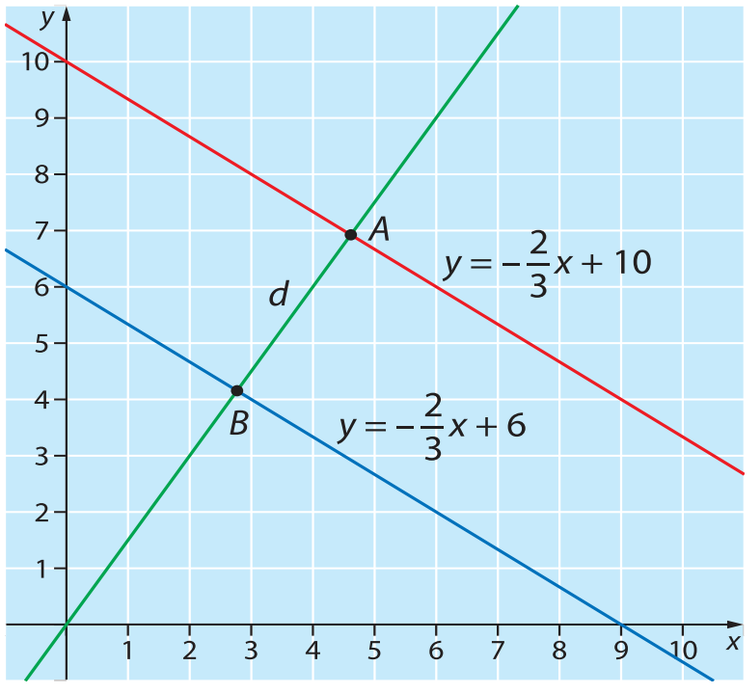
Lasketaan, kuinka pitkä etäisyys on pisteillä $\left(\frac{10}{7},\frac{16}{7}\right)$ ja (4, 1).

$$\sqrt{\left(\frac{10}{7}-4\right)^2+\left(\frac{16}{7}-1\right)^2}=2,874...\approx 2,9$$

Koska kartalla pisteiden etäisyys on 2,9 yksikköä, luonnossa etäisyys on $2,9\cdot 1\,\text{km}=2,9\,\text{km}$.

81.

Piirretään kuva valonsäteistä. Valonsäteiden etäisyys on suorien kohtisuora etäisyys. Piirretään suoralle $y = -\frac{2}{3}x + 6$ normaali n. Merkitään suoran ja sen normaalin leikkauspisteitä kirjaimilla A ja B ja säteiden etäisyyttä kirjaimella d.



Säteiden etäisyys d on pisteiden A ja B välinen etäisyys. Pisteet ovat normaalilla, joten määritetään ensin normaalin yhtälö.

Koska suoran $y = -\frac{2}{3}x + 6$ kulmakerroin $k = -\frac{2}{3}$, niin normaalin n kulmakerroin $k_n = \frac{2}{3}$.

Muodostetaan normaalin yhtälö kulmakertoimen $k_n = \frac{3}{2}$ ja pisteen (0, 0) avulla.

$$y - 0 = \frac{3}{2}(x - 0)$$

$$y = \frac{3}{2}x$$

Lasketaan suorien leikkauspisteiden koordinaatit yhtälöparin avulla.

Piste *A*

$$\begin{cases} y = -\frac{2}{3}x + 10 \\ y = \frac{3}{2}x \end{cases}$$

$x = \frac{60}{13}$ ja $y = \frac{90}{13}$

Piste *B*

$$\begin{cases} y = -\frac{2}{3}x + 6 \\ y = \frac{3}{2}x \end{cases}$$

$x = \frac{36}{13}$ ja $y = \frac{54}{13}$

Leikkauspisteen *A* koordinaatit ovat $\left(\frac{60}{13}, \frac{90}{13}\right)$ ja *B* koordinaatit ovat $\left(\frac{36}{13}, \frac{54}{13}\right)$.

Lasketaan pisteitten *A* ja *B* etäisyys.

$$\sqrt{\left(\frac{60}{13} - \frac{36}{13}\right)^2 + \left(\frac{90}{13} - \frac{54}{13}\right)^2} = 3,328... \approx 3,3$$

82.

Suoran yhtälön muodostamiseen tarvitaan kaksi pistettä. Koska x on matka kilometreinä Helsingistä alkaen, $x = 0$ tarkastelun alkupisteessä eli Helsingissä. Turkuun on matkaa 168 km alkupisteestä, joten $x = 165$.

x (km)	y (°C)	(x, y)
0	17,1	(0; 17,1)
165	22,3	(165; 22,3)

Suoran kulmakerroin

$$k = \frac{17,1 - 22,3}{0 - 165} = \frac{26}{825}$$

Lisäksi valitaan tunnetuksi pisteeksi $(x_0, y_0) = (165; 22,3)$, joten suoran yhtälöksi saadaan

$$y - 22,3 = \frac{26}{825}(x - 165)$$

$$y = \frac{26}{825}x + 17,1$$

Sijoittamalla $x = 110$ (165 − 55) suoran yhtälöön saadaan Salon lämpötila.

$$y = \frac{26}{825} \cdot 110 + 17,1 = 20,566 \approx 20,6 \text{ (°C)}$$

83.

a) Suoran yhtälön muodostamiseen tarvitaan kaksi pistettä. Koska x on puun tilavuus kuutiometreinä, $x = 0{,}060\ \text{m}^3$, kun puut painoivat 25 kg. Jos puiden tilavuus on $x = 0{,}050\ \text{dm}^3$, puun painoivat 168 kg.

x (m^3)	y (kg)	(x, y)
0,06	25	(0,06; 25)
0,5	168	(0,5; 168)

Suoran kulmakerroin on

$$k = \frac{25 - 168}{0{,}06 - 0{,}5} = 325$$

Suoran yhtälö on

$$y - 168 = 325(x - 0{,}5)$$
$$y = 325x + 5{,}5 \text{ (kg)}$$

b) Puiden paino saadaan, kun sijoitetaan suoran yhtälöön $x = 1{,}3$.

$$y = 325 \cdot 1{,}3 + 5{,}5 = 428 \approx 430 \text{ (kg)}$$

c) Männyn tilavuus saadaan, kun sijoitetaan $y = 5{,}5$ suoran yhtälöön.

$$5{,}5 = 325x + 5{,}5$$
$$x = 0\ (\text{m}^3)$$

Malli ei päde näin pienille puille.

84.

Määritettävä suora on vastakkaissuuntainen suoran $y = 2x$ kanssa, joten niiden kulmakertoimien tulo on -1. Suoran $y = 2x$ kulmakerroin on $k = 2$. Merkitään määritettävän suoran kulmakerrointa kirjaimella k.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan k.

$$2 \cdot k = -1$$

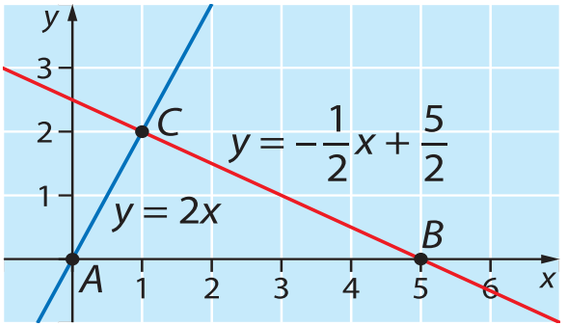
$$k = -\frac{1}{2}$$

Määritettävä suora kulkee pisteen (1, 2) kautta. Muodostetaan suoran yhtälö.

$$y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 1)$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

Piirretään suorat samaan koordinaatistoon ja merkitään kolmion kulmia kirjaimilla A, B ja C.



Kärkipisteet eli suorien leikkauspisteet saadaan ratkaisemalla kolme yhtälöparia.

Piste A

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = 0 \end{cases}$$

$x = 0$ ja $y = 0$

Piste B

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \\ y = 0 \end{cases}$$

$x = 5$ ja $y = 0$

Piste C

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \\ y = 2x \end{cases}$$

$x = 1$ ja $y = 2$

Kolmio on suorakulmainen, koska suorat $y = 2x$ ja $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Kolmion kannan pituus on pisteiden $C(1, 2)$ ja $B(5, 0)$ etäisyys.

Lasketaan kolmion kannan pituus.

$$\sqrt{(1-5)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{20}$$

Kolmion korkeus on pisteiden $A(0, 0)$ ja $C(1, 2)$ etäisyys.

Lasketaan kolmion korkeus.

$$\sqrt{(1-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{5}$$

Lasketaan kolmion pinta-ala.

$$A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{20} = 5$$

85.

a) Jotta mökkitie on mahdollisimman lyhyt, sen tulee olla kohtisuorassa valtatietä vastaan.

Suoran $y = 2x - 1$ kulmakerroin on $k = 2$. Merkitään mökkitien kulmakerrointa kirjaimella *k*. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan *k*.

$$2 \cdot k = -1$$

$$k = -\frac{1}{2}$$

Muodostetaan suoran yhtälö.

$$y - 0 = -\frac{1}{2}(x - 13)$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{13}{2}$$

Suorien leikkauspiste saadaan ratkaisemalla yhtälöpari

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{13}{2} \end{cases}$$

$x = 3$ ja $y = 5$

Tieliittymä pitää vetää pisteeseen (3, 5).

b) Lasketaan pisteiden (3, 5) ja (13, 0) etäisyys.

$$\sqrt{(3-13)^2+(5-0)^2} = 11{,}1803...$$

Kartalla mökkitien pituus on $11{,}1803\ldots$ yksikköä ja luonnossa

$$11{,}1803... \cdot 10 \text{ m} = 111{,}803... \text{ m} \approx 112 \text{ m}.$$

2 Eksponentiaalinen malli

2.1 Eksponenttifunktio

86.

a) Funktion f kuvaajasta nähdään, että $f(-1) \approx 2$ ja $f(-3) \approx 8$.

Funktion g kuvaajasta nähdään, että $g(1) \approx 1$ ja $g(3) \approx 8$.

b) Funktion g muuttujan arvojen kasvaessa funktion arvot kasvavat eli g kuvaa eksponentiaalista kasvua.

c) Funktion f kuvaajasta nähdään, että $f(-4) \approx 16$ ja funktion g kuvaajasta nähdään, että $g(4) \approx 16$. Huomataan, että $f(-4) = g(4) \approx 16$.

d) Nähdään, että funktioiden arvot ovat samat, kun muuttujan x arvot ovat toistensa vastalukuja.

Tiedetään, että $g(6) = 256$, joten $f(x) = 256$, kun $x = -6$.

e) $f(x) = g(x)$ siinä koordinaatiston pisteessä, jossa funktioiden kuvaajat leikkaavat toisensa eli pisteessä (0, 1). Tällöin $x \approx 0$.

87.

a) Funktion h kuvaajasta nähdään, että $h(0) \approx 8$ *ja* $h(1) \approx 4$.

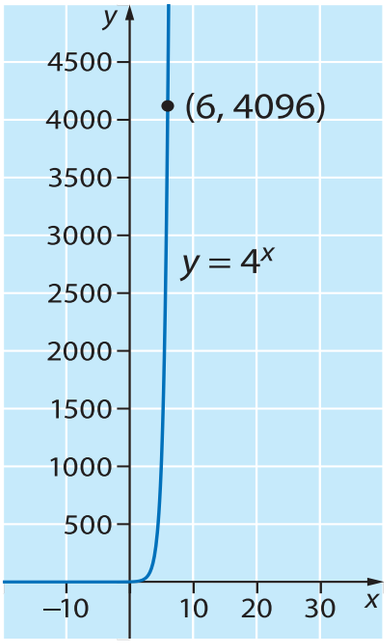
b) Yhtälön $h(x) = 16$ ratkaisuna on se pisteen x-koordinaatti, jonka y-koordinaatti on 16. Tämä piste on $(-1, 16)$ eli $x \approx -1$.

c) Epäyhtälön $2 < h(x) < 16$ ratkaisuna ovat ne x-koordinaatin arvot, joiden y-koordinaatit ovat vähintään 2 ja enintään 16. Nämä x:n arvot ovat $-1 < x < 2$.

88.

$g - E, j - C, f - A, l - B, k - D, h - F$

89.

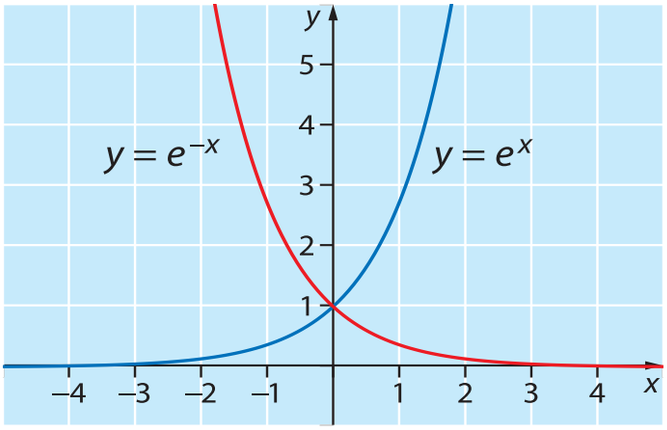


a) Funktion f kuvaajasta nähdään, että $f(3) \approx 64$.

b) Funktion f kuvaajasta huomataan, että $f(x) = 4096$, kun $x \approx 6$.

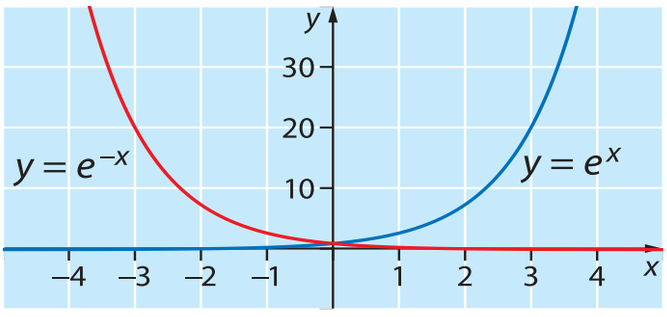
90.

a)



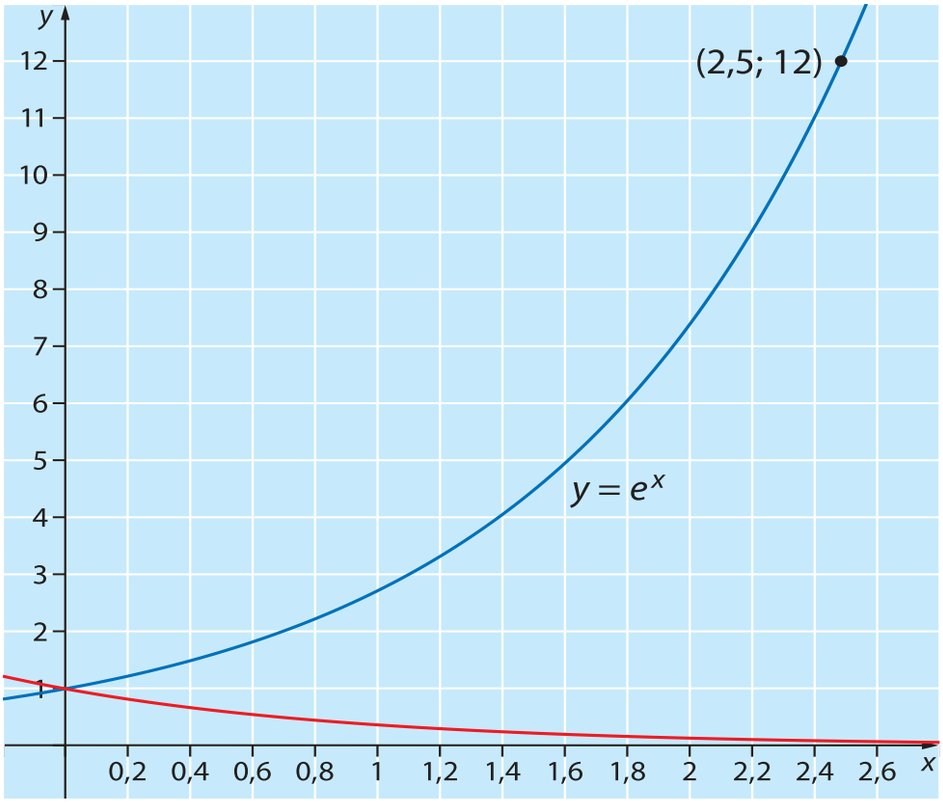
$f(x) = g(x)$ siinä koordinaatiston pisteessä, jossa funktioiden kuvaajat leikkaavat toisensa, eli pisteessä (0, 1). Tällöin $x = 0$.

b)



Funktion f kuvaajasta nähdään, että $f(3) \approx 20$ ja funktion g kuvaajasta nähdään, että $g(-3) \approx 20$.

c)



Funktion f kuvaajasta nähdään, että $f(x) = 12$, kun $x \approx 2,5$.

91.

a) Bakteerien määrä aloittamishetkellä saadaan sijoittamalla $x = 0$ funktioon g.

$$g(0) = 1000 \cdot e^{0,04 \cdot 0} = 1000$$

Aloittamishetkellä viljelmässä on 1000 bakteeria.

b) Vuorokaudessa on 24 tuntia, joten sijoittamalla $x = 24$ funktioon g saadaan bakteerien määrä vuorokauden kuluttua.

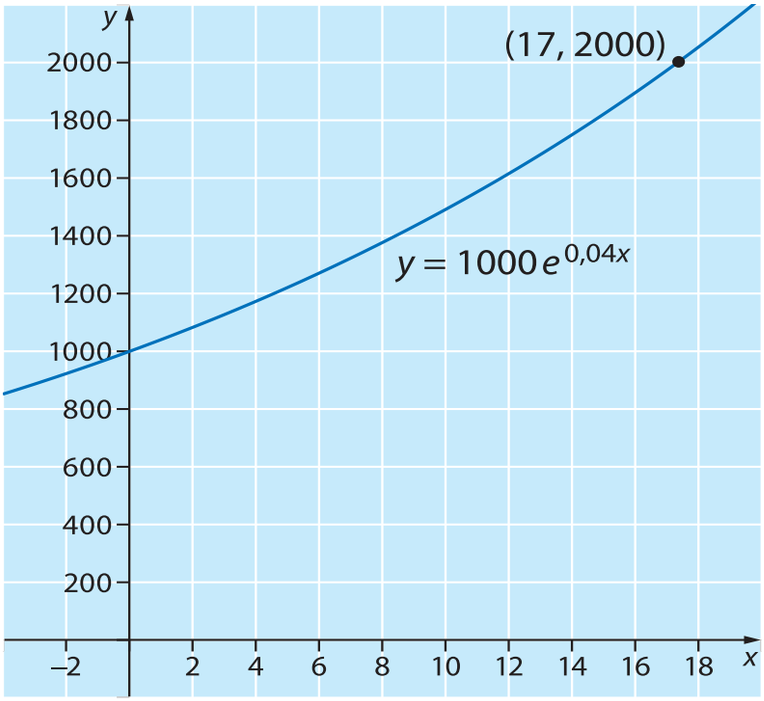
$$g(24) = 1000 \cdot e^{0,04 \cdot 24} = 2611,6964... \approx 2600$$

Vuorokauden kuluttua bakteereja on 2600.

c) Bakteerien määrä on kaksinkertaistunut, kun bakteerien määrä on $1000 \cdot 2 = 2000$.

Funktion g arvo eli kuvaajan y-koordinaatti kertoo bakteerien määrän.

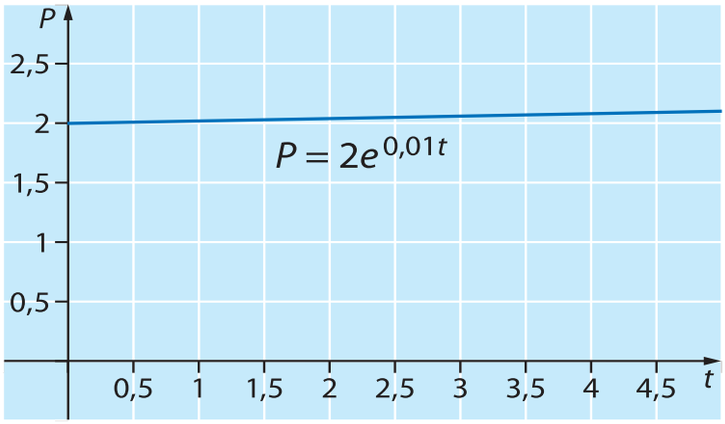
Etsitään kuvaajalta piste, jonka y-koordinaatti on 2000.



Funktio g kuvaajasta huomataan, että $g(x) = 2000,$ kun $x \approx 17$.

92.

a)

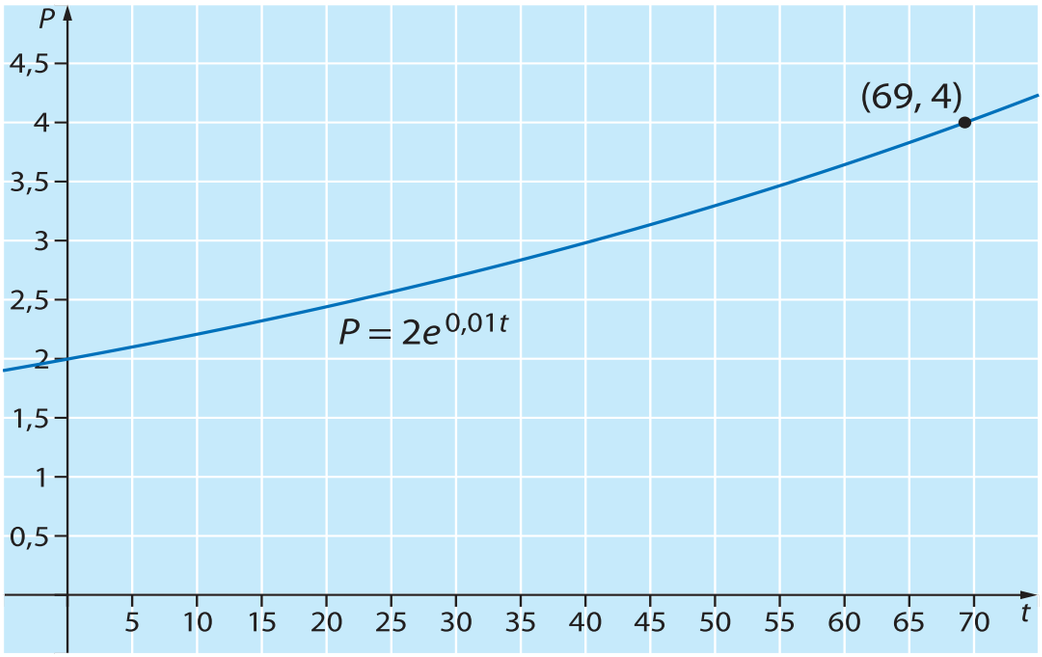


b) Tämänhetkinen asukasmäärä saadaan sijoittamalla $t = 0$ funktioon P.

$P(0) = 2e^{0,01 \cdot 0} = 2$

Tämänhetkinen asukasmäärä on 2 miljoonaa.

c) Asukasmäärä on kaksinkertaistunut, kun asukkaita on $2 \cdot 2 = 4$ miljoonaa.



Kuvaajasta P nähdään, että asukasmäärä on 4 miljoonaa, kun $x \approx 69$.

d) Asukasmäärä 100 vuotta sitten saadaan sijoittamalla $t = -100$ funktion P yhtälöön.

$$P(-100) = 2e^{0,01 \cdot (-100)} = 0,735... \approx 0,7$$

100 vuotta sitten asukkaita oli 0,7 miljoonaa.

93.

a) Potilaalle annetaan 5,0 mg jodia, joten $a = 5{,}0$. Kahdessa viikossa on 14 vuorokautta, joten sijoitetaan $x = 14$ funktioon f.

$$f(14) = 5{,}0 \cdot 0{,}917^{14} = 1{,}4864\ldots\,(\text{mg}) \approx 1{,}5\ \text{mg}$$

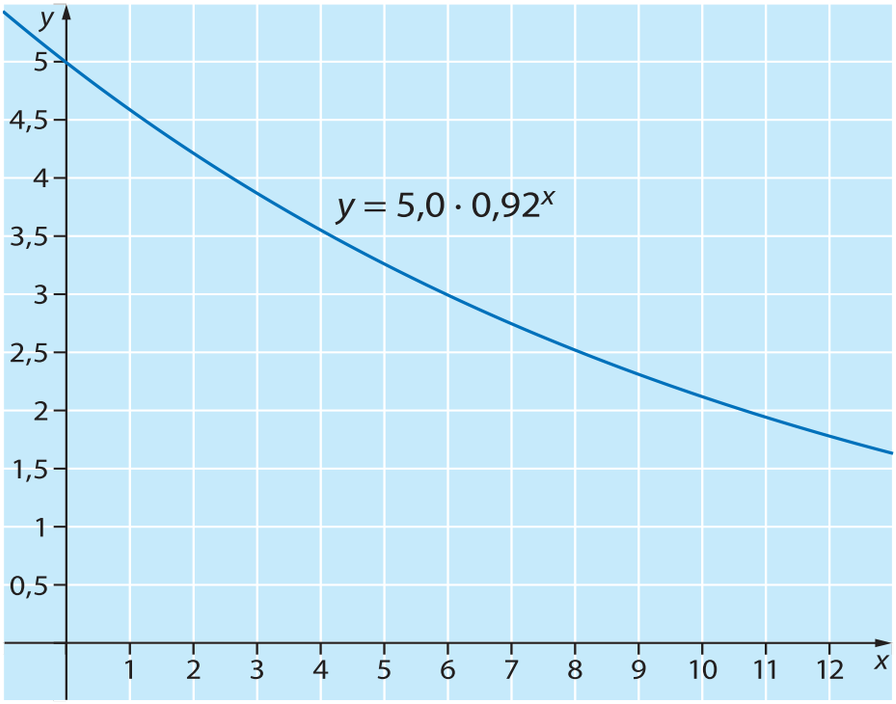
b) Lasketaan, kuinka monta milligrammaa jodia on 100 vuorokauden kuluttua sijoittamalla $x = 100$ funktioon f.

$$f(100) = 5{,}0 \cdot 0{,}917^{100} = 0{,}0008627\ldots\,(\text{mg})$$

Lasketaan, kuinka monta prosenttia 0,0008627… milligrammaa on 5,0 milligrammasta.

$$1 - \frac{5{,}0\ \text{mg} - 0{,}0008627\ldots\ \text{mg}}{5{,}0\ \text{mg}} = 0{,}0001725\ldots \approx 0{,}00017 = 0{,}017\ \%$$

c)



Aineesta on hajonnut puolet, kun ainetta on jäljellä $5,0 : 2 = 2,5$.

Funktion f kuvaajasta huomataan, että $f(x) = 2,5$, kun $x \approx 8$.

Aineen puoliintumisaika on 8 vuorokautta.

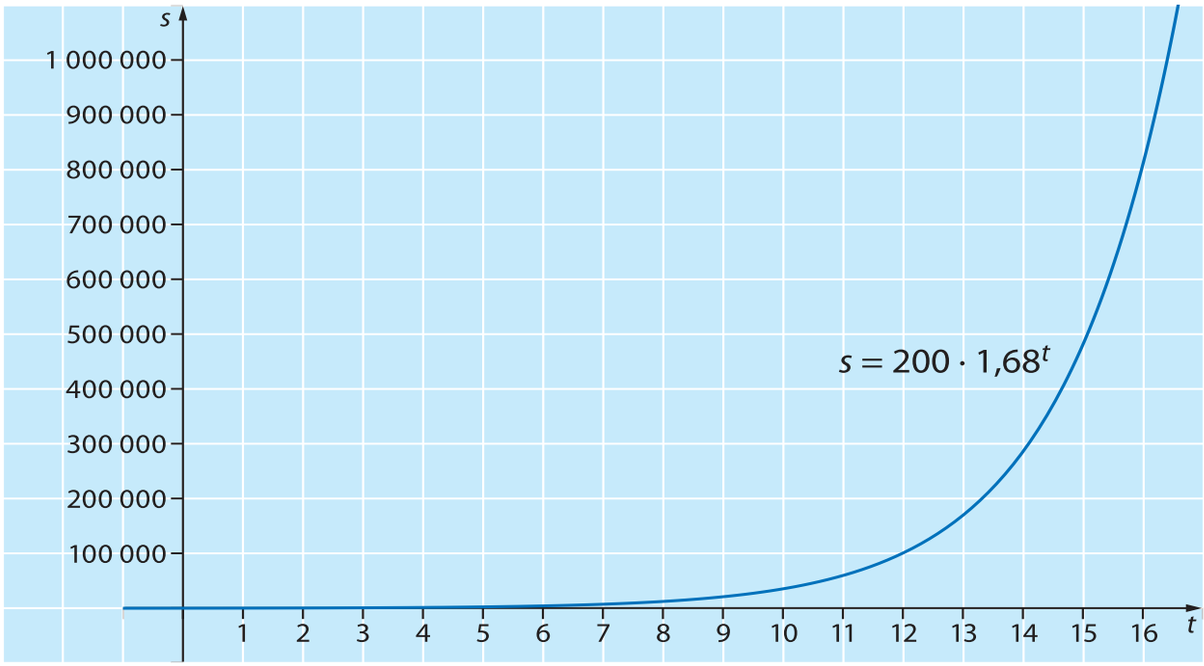
94.

a) Sijoitetaan $t = 5$ funktioon s.

$s(5) = 200 \cdot 1,682^5 = 2\,692,5262... \approx 2\,700$

Viiden tunnin kuluttua soluja on 2 700 kpl.

b)



Funktion s kuvaajasta nähdään, että $f(x) = 1\,000\,000$, kun $x \approx 16$

95.

a) Viikossa vedestä vaihtuu 0,05 %, jolloin vanhan veden määrä on $100\,\% - 0,05\,\% = 99,95\,\% = 0,9995$ edellisestä eli vanhan veden määrä 0,9995-kertaistuu.

Tutkitaan taulukon avulla aineen määrän muuttumista.

Viikot	Myrkyllisen aineen määrä (mg)
1	$0,9995 \cdot 300$
2	$0,9995^2 \cdot 300$
3	$0,9995^3 \cdot 300$
x	$0,9995^x \cdot 300$

Myrkyllisen aineen määrää voidaan mallintaa funktiolla $m(x) = 0,9995^x \cdot 300\ (\text{mg})$.

b) Vuodessa on 52 viikkoa. Veden myrkkypitoisuus vuoden päästä onnettomuudesta saadaan sijoittamalla $x = 52$ funktioon m.

$m(52) = 0,9995^{52} \cdot 300 = 292,2986... \ (\text{mg}) \approx 292 \text{ mg}$

96.

a) Puun massa kasvaa joka vuosi keskimäärin 13 %, jolloin puun uusi massa on $100\,\% + 13\,\% = 113\,\% = 1{,}13$ edellisestä eli puun massa 1,13-kertaistuu.

Tutkitaan taulukon avulla puun massan muuttumista.

Puun ikä (aloitushetki 11 vuotta)	Puun massa (kg)
1	$1{,}13 \cdot 1900$
2	$1{,}13^2 \cdot 1900$
3	$1{,}13^3 \cdot 1900$
x	$1{,}13^x \cdot 1900$

Puun massaa voidaan mallintaa funktiolla $f(x) = 1{,}13^x \cdot 1900$ (kg) .

b) Puun massa 20-vuotiaana saadaan sijoittamalla $x = 20 - 11 = 9$ funktioon *f*.

$f(9) = 1{,}13^9 \cdot 1900 = 5707{,}679\ldots$ (kg) ≈ 5700 kg

c) Puun massa 6-vuotiaana saadaan sijoittamalla $x = 6 - 11 = -5$ funktioon *f*.

$f(-5) = 1{,}13^{-5} \cdot 1900 = 1031{,}243\ldots$ (kg) ≈ 1000 kg

97.

a) Riisinjyvien määrä kasvaa joka ruudussa 100 %, jolloin riisijyvien uusi määrä on $100\,\% + 100\,\% = 200\,\% = 2$ edellisestä eli riisijyvien määrä kaksinkertaistuu.

Tutkitaan taulukon avulla riisijyvien määrän muuttumista.

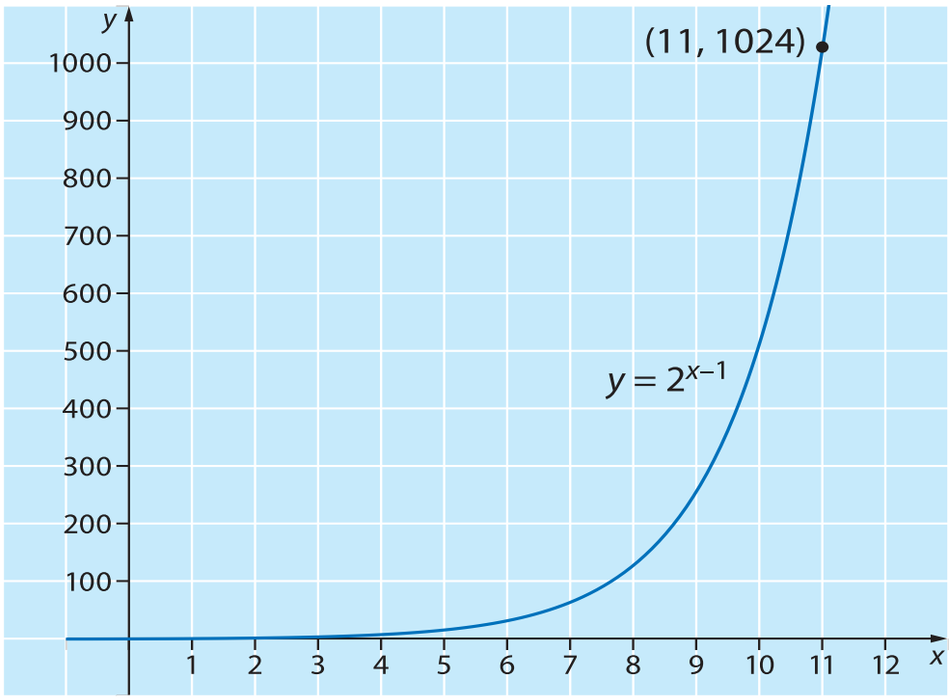
Monesko ruutu?	Riisijyvien määrä (kpl)
1	$1 \cdot 2^{1-1}$
2	$1 \cdot 2^{2-1}$
3	$1 \cdot 2^{3-1}$
x	$1 \cdot 2^{x-1}$

Riisijyvien määrä voidaan mallintaa funktiolla $f(x) = 1 \cdot 2^{x-1}$.

b) Riisijyvien määrä 10. ruudussa saadaan sijoittamalla $x = 10$ funktioon f.

$f(10) = 1 \cdot 2^{10-1} = 512$

c)



d) Funktiosta *f* huomataan, että 1024 riisinjyvää on 11. ruudussa.

98.

a) Vuosittainen kasvu on 5,0 %. Lasketaan kasvua kuvaava prosenttikerroin.

$100\,\% + 5{,}0\,\% = 105\,\% = 1{,}05$

Luomutuotteiden myynti siis 1,05-kertaistuu joka vuosi. Tutkitaan taulukon avulla myynnin muutosta.

Vuosi	Myynti (€)
1	$250\,000 \cdot 1{,}05$
2	$250\,000 \cdot 1{,}05^2$
3	$250\,000 \cdot 1{,}05^3$
x	$250\,000 \cdot 1{,}05^x$

Luomutuotteiden myyntiä voidaan mallintaa funktiolla
$m(x) = 250\,000 \cdot 1{,}05^x$

b) Myynti 8 vuoden kuluttua saadaan sijoittamalla $x = 8$ funktioon m.

$m(8) = 250\,000 \cdot 1{,}05^8 = 369\,363{,}860... \approx 370\,000$ (€)

c) Myynti kolme vuotta aikaisemmin saadaan sijoittamalla $x = -3$ funktioon m.

$m(-3) = 250\,000 \cdot 1{,}05^{-3} = 215\,959{,}399... \approx 220\,000$ (€)

99.

a) Lääkeaineen pitoisuus vähenee joka tunti 8,0 %. Lasketaan vähenemistä kuvaava prosenttikerroin.

$100\ \% - 8,0\ \% = 92\ \% = 0,92$

Lääkeaineen määrä siis 0,92-kertaistuu joka tunti. Tutkitaan taulukon avulla lääkeaineen määrän muutosta.

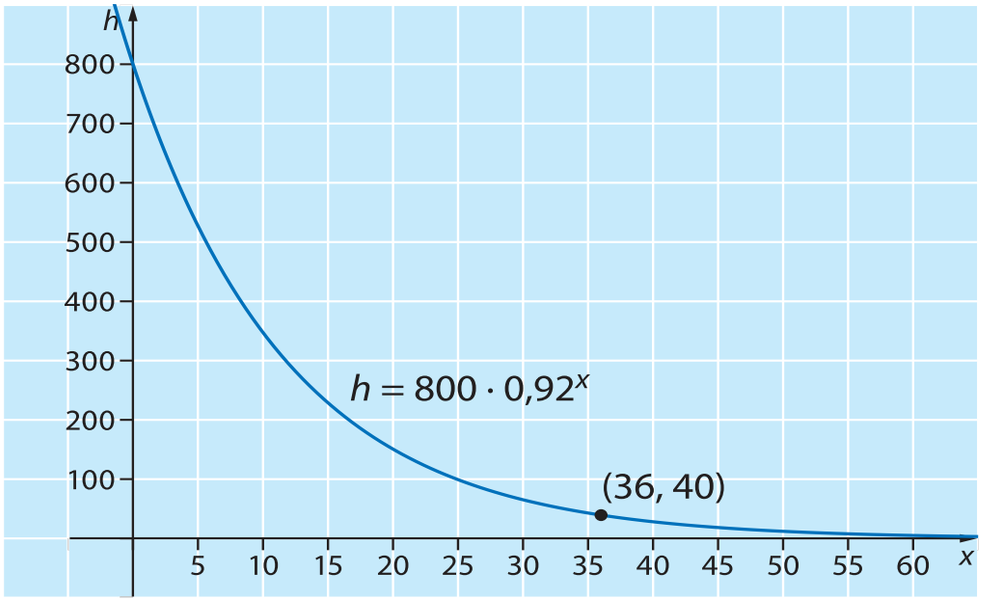
Tunti	Lääkeaineen määrä (mg)
1	$800 \cdot 0,92$
2	$800 \cdot 0,92^2$
3	$800 \cdot 0,92^3$
x	$800 \cdot 0,92^x$

Lääkeaineen määrää elimistössä voidaan mallintaa funktiolla
$h(x) = 800 \cdot 0,92^x$ (mg)

b) Vuorokaudessa on 24 tuntia, joten sijoittamalla $x = 24$ funktioon h saadaan lääkkeen määrä vuorokauden kuluttua sen antamisesta.

$h(24) = 800 \cdot 0,92^{24} = 108,142... \approx 110$ (mg)

c)



Lääkettä on poistunut 95 %, eli sitä on jäljellä $100\,\% - 95\,\% = 5\,\% = 0{,}05$

Lääkettä on jäljellä $800\text{ mg} \cdot 0{,}05 = 40\text{ mg}$.

Kuvaajasta h huomataan, että lääkettä on 40 mg jäljellä 36 tunnin kuluttua sen ottamisesta.

100.

a) Lämpötila nousee vuosittain 0,77 %. Lasketaan nousua kuvaava prosenttikerroin.

$$100\,\% + 0,77\,\% = 100,77\,\% = 1,0077$$

Lämpötila 1,0077-kertaistuu joka vuosi. Tutkitaan taulukon avulla veden lämpötilan muutosta.

Vuosi	Lämpötila (°C)
1	$5,0 \cdot 1,0077$
2	$5,0 \cdot 1,0077^2$
3	$5,0 \cdot 1,0077^3$
x	$5,0 \cdot 1,0077^x$

Lämpötilan muutosta voidaan mallintaa funktiolla $T(x) = 5,0 \cdot 1,0077^x$.

b) Sijoittamalla $x = 100$ funktioon T saadaan veden lämpötila 100 vuoden kuluttua.

$$T(100) = 5,0 \cdot 1,0077^{100} = 10,767... \approx 11\ (°\text{C})$$

c) Sijoittamalla $x = -50$ funktioon T saadaan veden lämpötila 50 vuotta mittaushetkeä aikaisemmin.

$$T(-50) = 5,0 \cdot 1,0077^{-50} = 3,407... \approx 3,4\ (°\text{C})$$

101.

a) Funktion f kuvaajasta nähdään, että $f(0) = 10$.

b) Funktion f kuvaajasta nähdään, että $f(-1) = 20$.

c) Yhtälön $f(x) = 5$ ratkaisuna on sen pisteen x-koordinaatti, jonka y-koordinaatti on 5. Tämä piste on (1, 5) eli $x \approx 1$.

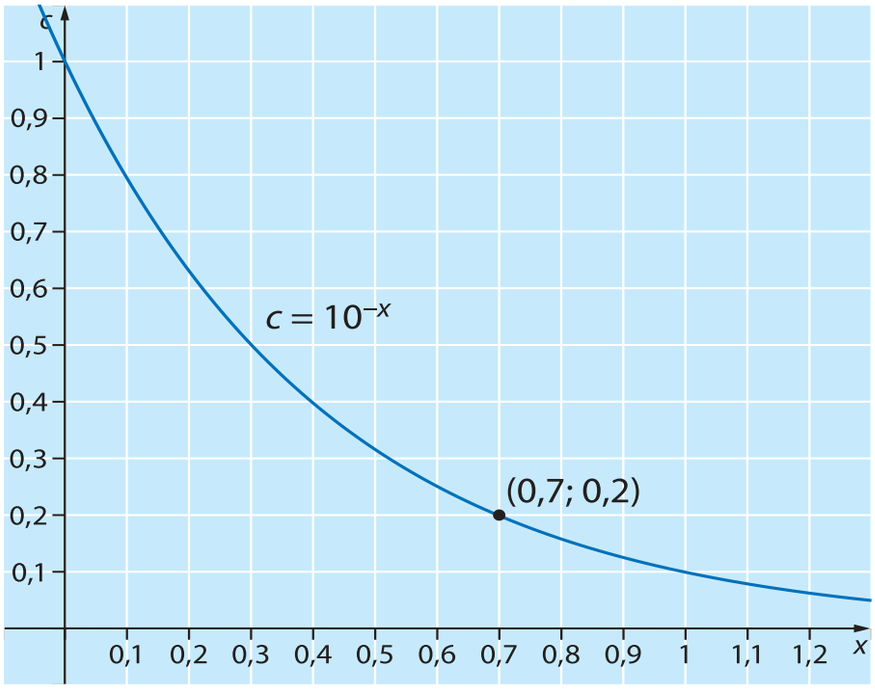
d) Epäyhtälön $f(x) > 10$ ratkaisuna ovat ne pisteen x-koordinaatit, joiden y-koordinaatit ovat yli 10. Nämä x-koordinaatit ovat pienempää kuin 0 eli $x < 0$.

102.

a) Liuoksen, jonka pH = 2,5, konsentraatio saadaan sijoittamalla $x = 2{,}5$ funktioon c.

$$c(2{,}5) = 10^{-2{,}5} = 0{,}00316... \approx 0{,}0032 \text{ (mol/l)}$$

b)



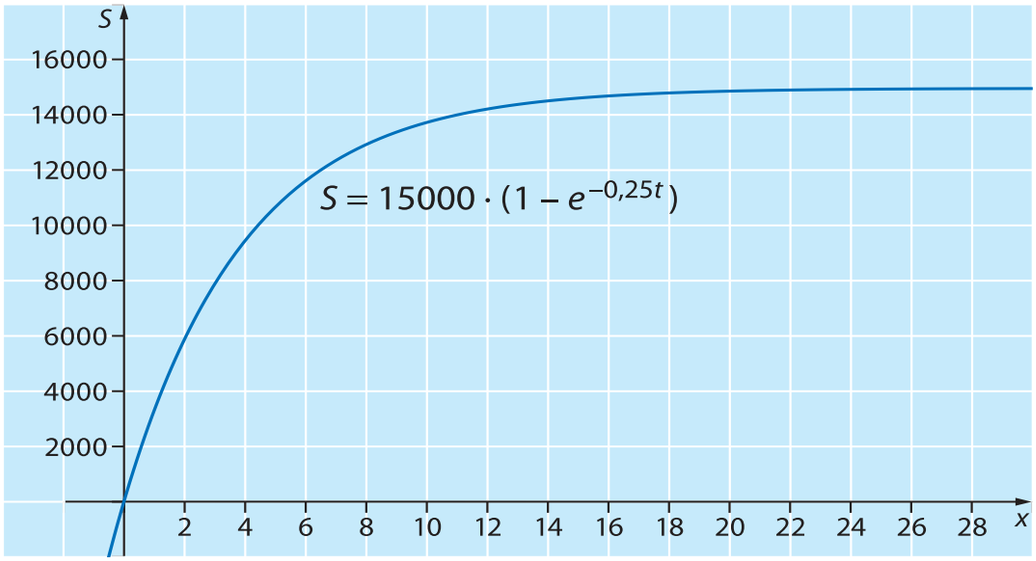
Funktion c kuvaajasta nähdään, että liuoksen konsentraatio on 0,2 mol/l, kun pH on 0,7.

103.

a) Tuotteen ensimmäisen kuuden kuukauden myynti saadaan sijoittamalla $t = 6$ funktioon S.

$$S(6) = 15\,000 \cdot (1 - e^{-0{,}25 \cdot 6}) = 11\,653{,}047... \approx 12\,000$$

b)



Kuvaajasta S nähdään, että tuotetta on myyty 14 000 kappaletta 11 kuukaudessa.

c) Tuotteen myynti vakiintuu tasolle 15 000 kpl.

104.

a) Kurssi nousee vuosittain 19,4 %. Lasketaan nousun prosenttikerroin.

$100\,\% + 19{,}4\,\% = 119{,}4\,\% = 1{,}194$

Kurssi 1,194-kertaistuu joka vuosi. Tutkitaan taulukon avulla osakkeen kurssin muutosta.

Vuosi 2016 alkaen	Osakkeen kurssi (€)
1	$44{,}87 \cdot 1{,}194$
2	$44{,}87 \cdot 1{,}194^2$
3	$44{,}87 \cdot 1{,}194^3$
x	$44{,}87 \cdot 1{,}194^x$

Osakkeen kurssia voidaan mallintaa funktiolla $k(x) = 44{,}87 \cdot 1{,}194^x$ (€).

b) Osakkeen kurssi 4 vuoden kuluttua saadaan sijoittamalla $x = 4$ funktioon k.

$k(4) = 44{,}87 \cdot 1{,}194^4 = 91{,}195... \approx 91{,}20$ (€)

c) Osakkeen kurssi 5 vuotta sitten saadaan sijoittamalla $x = -5$ funktioon k.

$k(-5) = 44{,}78 \cdot 1{,}194^{-5} = 18{,}4528... \approx 18{,}50$ (€)

105.

a) Eläkeyhtiöiden pääoma pienenee joka vuosi 2,5 %. Lasketaan sen prosenttikerroin.

$100\,\% - 2{,}5\,\% = 97{,}5\,\% = 0{,}975$

Pääoma 0,975-kertaistuu joka vuosi. Tutkitaan taulukon avulla yhtiöisen nettovarallisuuden muutosta.

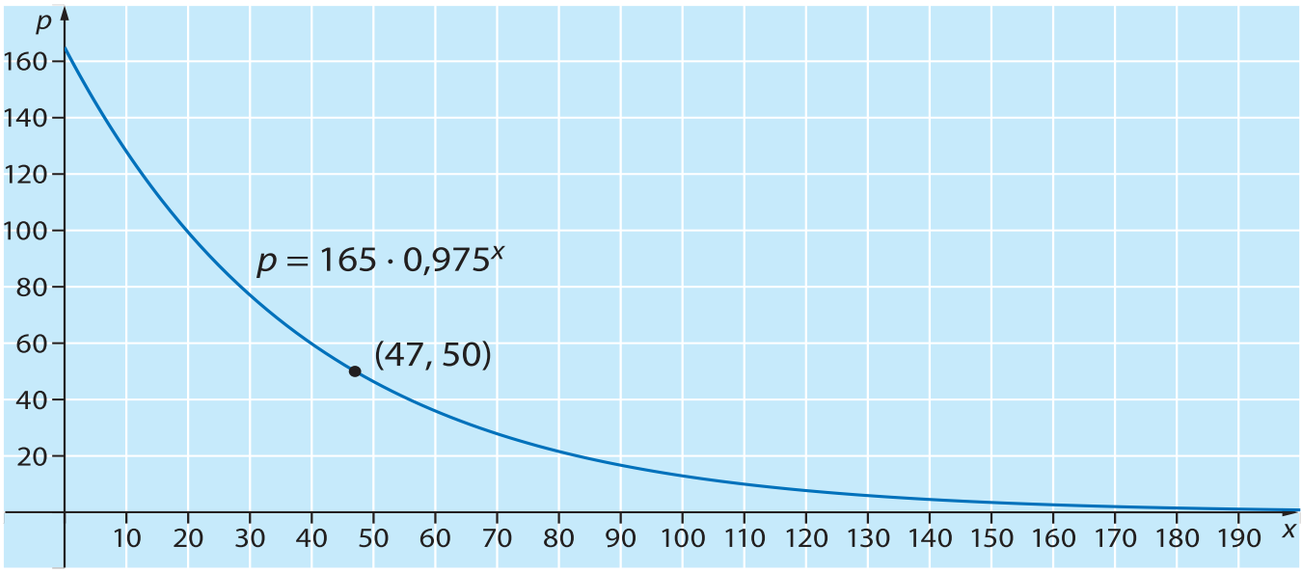
Vuosi 2016 lähtien	Nettovarallisuus (mrd. €)
1	$165 \cdot 0{,}975$
2	$165 \cdot 0{,}975^2$
3	$165 \cdot 0{,}975^3$
x	$165 \cdot 0{,}975^x$

Eläkeyhtiöiden pääomaa voidaan mallintaa funktiolla
$p(x) = 165 \cdot 0{,}975^x$ (mrd. €)

b) Eläkeyhtiön nettovarallisuus 20 vuoden kuluttua saadaan sijoittamalla $x = 20$ funktioon p.

$p(20) = 165 \cdot 0{,}975^{20} = 99{,}443\ldots \approx 100$ (mrd. €)

c)



Funktion p kuvaajasta nähdään, että 47 vuoden kuluttua omaisuus on kutistunut 50 miljardiin.

2.2 Eksponenttiyhtälön ratkaiseminen

106.

a) $5^x = 5^{-x+2}$

$x = -x + 2$

$2x = 2 \qquad |:2$

$x = 1$

b) $9^{2x} = 3$

$(3^2)^{2x} = 3^1$

$3^{4x} = 3^1$

$4x = 1 \qquad |:4$

$x = \frac{1}{4}$

c) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 9$

$\left(\frac{1}{3}\right)^x = 3^2$

$(3^{-1})^x = 3^2$

$3^{-x} = 3^2$

$-x = 2 \qquad |\cdot(-1)$

$x = -2$

107.

a) $2^x = 32$

$2^x = 2^5$

$x = 5$

b) $3^{2x-1} = 9$

$3^{2x-1} = 3^2$

$2x - 1 = 2$

$2x = 3 \quad | : 2$

$x = \frac{3}{2}$

c) $6^{5x-10} = 1$

$6^{5x-10} = 6^0$

$5x - 10 = 0$

$5x = 10 \quad | : 5$

$x = 2$

d) $4^x = \frac{1}{16}$

$4^x = 16^{-1}$

$4^x = (4^2)^{-1}$

$4^x = 4^{-2}$

$x = -2$

108.

a) $4^x = 2^{1-x}$

$(2^2)^x = 2^{1-x}$

$2^{2x} = 2^{1-x}$

$2x = 1 - x$

$3x = 1 \qquad | : 3$

$x = \frac{1}{3}$

b) $\left(\frac{1}{5}\right)^{4x} = 25^2$

$(5^{-1})^{4x} = (5^2)^2$

$5^{-4x} = 5^4$

$-4x = 4 \qquad | : (-4)$

$x = -1$

109.

a)
$$4^{6x-3} = 8^{4-x}$$
$$(2^2)^{6x-3} = (2^3)^{4-x}$$
$$2^{12x-6} = 2^{12-3x}$$
$$12x-6 = 12-3x$$
$$15x = 18 \qquad \big| :15$$
$$x = \frac{18}{15} = \frac{6}{5}$$

b)
$$\frac{81^{x+1}}{27^{5x}} = 3$$
$$\frac{(3^4)^{x+1}}{(3^3)^{5x}} = 3^1$$
$$\frac{3^{4x+4}}{3^{15x}} = 3^1$$
$$3^{(4x+4)-15x} = 3^1$$
$$(4x+4)-15x = 1$$
$$4x-15x+4 = 1$$
$$-11x = -3 \qquad \big| :(-11)$$
$$x = \frac{3}{11}$$

110.

a) $3^x = 7$

$x = \log_3 7$

b) $4 \cdot 2^x = 24 \quad \left| : 4 \right.$

$2^x = 6$

$x = \log_2 6$

c) $2 \cdot e^x = 6 \quad \left| : 2 \right.$

$e^x = 3$

$x = \ln 3$

d) $4 \cdot e^{x-1} = 8 \quad \left| : 4 \right.$

$e^{x-1} = 2$

$x - 1 = \ln 2$

$x = \ln 2 + 1$

111.

a) $2^{5x} - 11 = 2$

$$2^{5x} = 13$$

$$5x = \log_2 13 \qquad \big| : 5$$

$$x = \frac{\log_2 13}{5}$$

b) $e^{2x-1} - 2 = 0$

$$e^{2x-1} = 2$$

$$2x - 1 = \ln 2$$

$$2x = \ln 2 + 1 \qquad \big| : 2$$

$$x = \frac{\ln 2 + 1}{2}$$

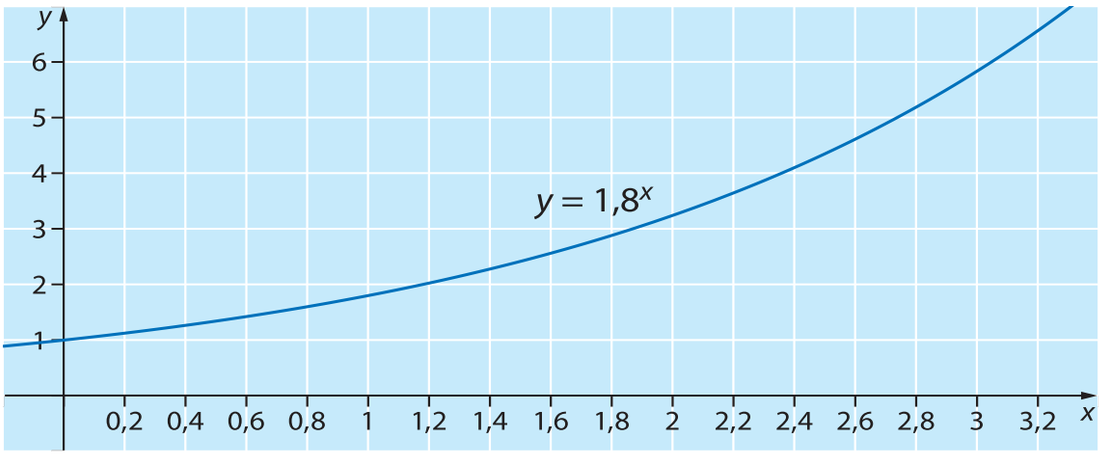
112.

a) $5^x = 14$

b) $e^x = 5$

c) $e^{4x} = 3$

113.



a) Funktion *f* kuvaajasta nähdään, että $1,8^x = 6$, kun $x \approx 3,0$.

b) Funktion *f* kuvaajasta nähdään, että $1,8^x = 2,5$, kun $x \approx 1,6$.

114.

a) Myynti, kun yritys ei mainosta ollenkaan, saadaan sijoittamalla $x = 0$ yhtälöön.

$$40\,000 \cdot 1,00005^0 = 40\,000 \text{ €}$$

b) Muodostetaan myynnin määrän 50 000 € avulla yhtälö ja ratkaistaan se.

$$40\,000 \cdot 1,00005^x = 50\,000$$
$$x = 4\,462,982...$$
$$x \approx 4\,500 \text{ €}$$

Myynnin määrä on 50 000 €, kun mainostetaan 4 500 eurolla.

115.

a) Muodostetaan toriumin määrän 1 500 g:n avulla yhtälö ja ratkaistaan se.

$$2500 \cdot 0,964^x = 1500$$
$$x = 13,932...$$
$$x \approx 14$$

Toriumin määrä on 1500 g 14 vuorokauden kuluttua.

b) Kun toriumia on hajonnut puolet, sitä on jäljellä $\frac{2500\text{ g}}{2} = 1250\text{ g}$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se.

$$2500 \cdot 0,964^x = 1250$$
$$x = 18,905...$$
$$x \approx 19$$

Toriumia on hajonnut puolet 19 vuorokaudessa.

116.

a) Kun kauriita on 200, funktio saa arvon 200.

Ratkaistaan yhtälö $f(x) = 200$.

$$300 \cdot (1 - e^{-0,3x}) = 200$$
$$x = 3,662...$$
$$x \approx 4$$

Kauriita on 4 vuoden kuluttua 200.

b) Kun kauriita on 280, funktio saa arvon 200.

Ratkaistaan yhtälö $f(x) = 280$.

$$300 \cdot (1 - e^{-0,3x}) = 280$$
$$x = 9,026...$$
$$x \approx 9$$

Kauriita on 9 vuoden kuluttua 280.

117.

a) Kokeesta saa arvosanan 5, kun funktio saa arvon 5. Ratkaistaan yhtälö $k(x) = 5$.

$$4 \cdot e^{0,0306x} = 5$$
$$x = 7,2922...$$
$$x \approx 7$$

7 pisteellä saa arvosanan 5.

b) Kokeesta saa arvosanan 9, kun funktio saa arvon 9. Ratkaistaan yhtälö $k(x) = 9$.

$$4 \cdot e^{0,0306x} = 9$$
$$x = 26,500...$$
$$x \approx 27$$

27 pisteellä saa arvosanan 9.

118.

a) Pääoma kasvaa joka vuosi 2,0 %. Lasketaan kasvun prosenttikerroin.

$100\ \% + 2,0\ \% = 102\ \% = 1,02$

Pääoma 1,02-kertaistuu joka vuosi. Tutkitaan taulukon avulla pääoman muutosta.

Vuodet	Pääoma
1	$10\,000 \cdot 1,02$
2	$10\,000 \cdot 1,02^2$
3	$10\,000 \cdot 1,02^3$
x	$10\,000 \cdot 1,02^x$

Kasvanutta pääomaa voidaan mallintaa funktiolla $f(x) = 10\,000 \cdot 1,02^x$

b) Kun pääoma on kasvanut 13 000 euroon, funktio saa arvon 13 000.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se.

$$f(x) = 13\,000$$
$$10\,000 \cdot 1,02^x = 13\,000$$
$$x = 13,248...$$
$$x \approx 13$$

119.

a) Henkilöstö- ja materiaalikulut vähenevät joka vuosi 5,0 %. Lasketaan sen prosenttikerroin.

$100\,\% - 5,0\,\% = 95\,\% = 0,95$

Kulut 0,95-kertaistuvat joka vuosi. Tutkitaan taulukon avulla kulujen määrää.

Vuodet	Kulujen määrä (milj, €)
1	$1,8 \cdot 0,95$
2	$1,8 \cdot 0,95^2$
3	$1,8 \cdot 0,95^3$
x	$1,8 \cdot 0,95^x$

Kulujen määrää voidaan mallintaa funktiolla $f(x) = 1,8 \cdot 0,95^x$ (milj. €).

b) Kun kulut on pudotettu 1 miljoonaan, funktio saa arvon 1. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se.

$$f(x) = 1$$
$$1,8 \cdot 0,95^x = 1$$
$$x = 11,459...$$
$$x \approx 11$$

11 vuoden kuluttua kulut on pudotettu 1 miljoonaan euroon.

120.

a) Syntyvyys laskee 2,8 % joka vuosi. Lasketaan laskun prosenttikerroin.

$100\,\% - 2{,}8\,\% = 97{,}2\,\% = 0{,}972$

Syntyvyys 0,972-kertaistuu joka vuosi. Tutkitaan taulukon avulla syntyvien määrää.

Vuosi 2016 lähtien	Syntyvien määrä
1	$55\,040 \cdot 0{,}972$
2	$55\,040 \cdot 0{,}972^2$
3	$55\,040 \cdot 0{,}972^3$
x	$55\,040 \cdot 0{,}972^x$

Syntyvien määrää voidaan mallintaa lausekkeella $55\,040 \cdot 0{,}972^x$.

b) Kun lapsia syntyy 50 000, lauseke saa arvon 50 000. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se.

$$55\,040 \cdot 0{,}972^x = 50\,000$$
$$x = 3{,}381...$$
$$x \approx 3$$

Kolmen vuoden kuluttua lapsia syntyy 50 000.

c) Kun lapsia syntyy 63 000, lauseke saa arvon 63 000. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se.

$$55\,040 \cdot 0{,}972^x = 63\,000$$

$$x = -4{,}756...$$

$$x \approx -5$$

Vuonna $2016 - 5 = 2011$ lapsia syntyi 63 000.

121.

a) Kun uraanista on hajonnut 90 %, sitä on jäljellä
$100\,\% - 90\,\% = 10\,\% = 0{,}1$.

Lasketaan, kuinka monta grammaa uraania on jäljellä.

$$4500\ \text{g} \cdot 0{,}1 = 450\ \text{g}$$

Kun uraania on jäljellä 450 g, funktio saa arvon 450. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se.

$$\begin{aligned} N(t) &= 450 \\ 4500 \cdot e^{-0{,}0099t} &= 450 \\ t &= 232{,}584... \\ t &\approx 233 \end{aligned}$$

233 vuodessa uraania on kulunut 90 %.

b) Lasketaan puolet alkuperäisestä uraanin määrästä

$$\frac{4500\ \text{g}}{2} = 2250\ \text{g}$$

Kun uraania on puolet jäljellä, funktio saa arvon 2250. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se.

$$\begin{aligned} N(t) &= 2250 \\ 4500 \cdot e^{-0{,}0099t} &= 2250 \\ t &= 70{,}014... \\ t &\approx 70 \end{aligned}$$

Uraanin puoliintumisaika on 70 vuotta.

122.

a) $3^{3x-4} = 1$

$3^{3x-4} = 3^0$

$3x - 4 = 0$

$3x = 4 \qquad |:3$

$x = \frac{4}{3}$

b) $2^{5-2x} = 8^{x+1}$

$2^{5-2x} = (2^3)^{x+1}$

$2^{5-2x} = 2^{3x+3}$

$5 - 2x = 3x + 3$

$5x = 2 \qquad |:5$

$x = \frac{2}{5}$

c) $49^{2x-4} = \frac{1}{7}$

$(7^2)^{2x-4} = 7^{-1}$

$7^{4x-8} = 7^{-1}$

$4x - 8 = -1$

$4x = 7 \qquad |:4$

$x = \frac{7}{4}$

123.

a) $2 \cdot 5^x = 8 \qquad \big| : 2$

$5^x = 4$

$x = \log_5 4$

b) $\frac{4^x}{3} = 11 \qquad \big| \cdot 3$

$4^x = 33$

$x = \log_4 33$

c) $5 \cdot e^x - 12 = 3$

$5 \cdot e^x = 15 \qquad \big| : 5$

$e^x = 3$

$x = \ln 3$

124.

a) Platinan hinta on 363 $, kun funktion arvo on 363. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se.

$$f(x) = 363$$
$$180 \cdot e^{0,14x} = 363$$
$$x = 5,010...$$
$$x \approx 5$$

Vuonna $1992 + 5 = 1997$ platinan hinta oli 363 $.

b) Platinan hinta on 1400 $, kun funktion arvo on 1400. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se.

$$f(x) = 1400$$
$$180 \cdot e^{0,14x} = 1400$$
$$x = 14,651...$$
$$x \approx 15$$

Vuonna $1992 + 15 = 2007$ platinan hinta oli 1400 $.

125.

a) Muodostetaan auton hinnan 12 200 avulla yhtälö ja ratkaistaan se.

$$h(x) = 12\,200$$
$$0,92^x \cdot 18\,500 = 12\,200$$
$$x = 4,993...$$
$$x \approx 5$$

5 vuoden kuluttua auton hinta on 12 200 €.

b) Muodostetaan auton hinnan 8000 avulla yhtälö ja ratkaistaan se.

$$h(x) = 8000$$
$$0,92^x \cdot 18\,500 = 8000$$
$$x = 10,054$$
$$x \approx 10$$

Niilo on omistanut auton 10 vuotta.

126.

a) Hiivan massa kasvaa joka tunti 0,80 %. Lasketaan kasvun prosenttikerroin.

$100\,\% + 0{,}80\,\% = 100{,}8\% = 1{,}008$

Hiivan massa 1,008-kertaistuu joka tunti. Tutkitaan taulukon avulla hiivan massan muutosta.

Tunti	Hiivan massa (g)
1	$0{,}58 \cdot 1{,}008$
2	$0{,}58 \cdot 1{,}008^2$
3	$0{,}58 \cdot 1{,}008^3$
t	$0{,}58 \cdot 1{,}008^t$

Hiivan massaa voidaan mallintaa funktiolla $f(t) = 0{,}58 \cdot 1{,}008^t$ (g).

b) Grammoina hiivan kaksinkertainen massa on $0{,}58\text{ g} \cdot 2 = 1{,}16\text{ g}$.

Hiivan massa on 1,16 g, kun funktio saa arvon 1,16. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se.

$$f(t) = 1{,}16$$
$$0{,}58 \cdot 1{,}008^t = 1{,}16$$
$$t = 86{,}989...$$
$$t \approx 87$$

Hiivan massa kaksinkertaistuu 87 tunnin jälkeen.

2.3 Potenssiyhtälö

127.

a) Kuvasta nähdään, että toisen funktion kuvaaja A kulkee aina x-akselilla tai sen yläpuolella. Tällainen funktio saa vain positiivisia arvoja tai arvon nolla.

Koska funktion $g(x) = x^4$ eksponenttina on parillinen luku, se saa aina vähintään arvon nolla (mikä tahansa luku korotettuna parilliseen potenssiin on aina vähintään nolla). Niinpä A on funktion g kuvaaja ja B funktion f kuvaaja.

b) Kuvaajan avulla on etsittävä sellainen muuttujan arvo x, että funktio f saa arvon -1.

$$f(x) = -1$$
$$x^3 = -1$$
$$x \approx -1$$

c) Kuvaajan avulla on etsittävä sellainen muuttujan arvo x, että funktion f ja g saa saman arvon.

$$f(x) = g(x)$$
$$x^3 = x^4$$
$$x = 0 \text{ tai } x = 1$$

128.

Kuvasta nähdään, että funktion kuvaajat A ja C kulkevat aina *x*-akselilla tai sen yläpuolella. Tällaiset funktiot saavat vain positiivisia arvoja tai arvon nolla. Koska funktioiden $h(x) = x^6$ ja $f(x) = x^4$ eksponenttina on parillinen luku, ne saavat aina vähintään arvon nolla (mikä tahansa luku korotettuna parilliseen potenssiin on aina vähintään nolla).

Koska kuvaaja A kasvaa jyrkemmin kuin kuvaaja C, niin kuvaaja $\mathrm{A} = h(x)$ ja kuvaaja $\mathrm{C} = f(x)$.

Funktion kuvaaja B kulkee aina *x*-akselilla tai sen alapuolella. Tällainen funktio saavat vain negatiivisia arvoja tai arvon nolla. Koska funktion $g(x) = -x^4$ eksponenttina on parillinen luku ja kertoimena on -1, se saa aina enintään arvon nolla. Kuvaaja $\mathrm{B} = g(x)$.

129.

a) $2x^2 - 5 = 27$

$2x^2 = 32 \quad | : 2$

$x^2 = 16$

$x = \pm\sqrt{16}$

$x = \pm 4$

b) $-x^3 = 1000 \quad | : (-1)$

$x^3 = -1000$

$x = \sqrt[3]{-1000}$

$x = -10$

c) $x^7 = 2$

$x = \sqrt[7]{2}$

d) $3x^8 - 9 = 0$

$3x^8 = 9 \quad | : 3$

$x^8 = 3$

$x = \pm\sqrt[8]{3}$

130.

a) Funktio leikkaa x-akselin, kun $y = 0$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se.

$$f(x) = 0$$
$$x^3 + 3 = 0$$
$$x^3 = -3$$
$$x = \sqrt[3]{-3}$$

Funktio f leikkaa x-akselin pisteessä $\left(\sqrt[3]{-3}, 0\right)$.

b) Lasketaan yhtälö.

$$f(x) = -5$$
$$x^3 + 3 = -5$$
$$x^3 = -8$$
$$x = \sqrt[3]{-8}$$
$$x = -2$$

131.

a) Funktion nollakohdat lasketaan yhtälöstä $g(x) = 0$.

$$
\begin{aligned}
g(x) &= 0 \\
2x^4 - 10 &= 0 \\
2x^4 &= 10 \qquad \big| : 2 \\
x^4 &= 5 \\
x &= \pm\sqrt[4]{5}
\end{aligned}
$$

b)
$$
\begin{aligned}
g(x) &= 4 \\
2x^4 - 10 &= 4 \\
2x^4 &= 14 \qquad \big| : 2 \\
x^4 &= 7 \\
x &= \pm\sqrt[4]{7}
\end{aligned}
$$

132.

a) Pallon, jonka säde on 3,60 cm, tilavuus lasketaan sijoittamalla $r = 3{,}60$ funktion $V(r)$ lausekkeeseen.

$$V(3,6) = \frac{4}{3}\pi \cdot 3,6^3 = 195,4321... \approx 195$$

Pallon tilavuus on 195 cm^3.

b) Säde saadaan tilavuuden avulla ratkaisemalla yhtälö $V(r) = 1260$.

$$V(r) = 1260$$

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 1260$$

$$r = 6,700...$$

$$r \approx 6,70$$

Pallon säde on 6,70 cm.

133.

a) Aineen, jonka konsentraatio on 1,2 mol/l, reaktion nopeus lasketaan sijoittamalla $x = 1{,}2$ funktion $v(x)$ lausekkeeseen.

$$v(1,2) = 0,0028 \cdot 1,2^4 = 0,005806... \approx 0,0058$$

Reaktion nopeus on $0,0058 \frac{\text{mol/l}}{\text{s}}$.

b) Konsentraatio saadaan reaktion nopeuden avulla ratkaisemalla yhtälö $v(x) = 0,078$.

$$\begin{aligned} v(x) &= 0,078 \\ 0,0028x^4 &= 0,078 \\ x &= \pm 2,297... \\ x &\approx \pm 2,30 \end{aligned}$$

Koska konsentraatio ei voi olla negatiivista, $x = 2{,}30$. Lähtöaineen konsentraatio on $2,30$ mol/l.

134.

Auton nopeus saadaan jarrutusmatkan avulla ratkaisemalla yhtälö $f(x) = 85$.

$$f(x) = 85$$
$$\frac{1}{4000}x^3 = 85$$
$$x = 69,795...$$
$$x \approx 70$$

Auton nopeus oli 70 km/h.

135.

a) Fluorin elektronegatiivisuus voidaan laskea sijoittamalla $m = 19$ funktion $e(m)$ yhtälöön.

$$e(19) = 7{,}3463 \cdot 19^{-\frac{9}{40}} = 3{,}7874... \approx 3{,}8$$

Fluorin elektronegatiivisuus on 3,8.

b) Bromin massa voidaan laskea sen elektronegatiivisuus arvon avulla ratkaisemalla yhtälö $e(m) = 2{,}8$.

$$\begin{aligned} e(m) &= 2{,}8 \\ 7{,}3463m^{-\frac{9}{40}} &= 2{,}8 \\ m &= 72{,}748... \\ m &\approx 73 \end{aligned}$$

Bromin massa on 73.

136.

a) Vuodesta 2000 vuoteen 2011 on kulunut aikaa $2011-2000=11$ vuotta.

Merkitään vuotuista muutosta kuvaavaa prosenttikerrointa kirjaimella *k*. Tällöin kahvipaketin hinta *k*-kertaistuu joka vuosi.

Vuosi	Kahvipaketin hinta (€)
1	$2,65 \cdot k$
2	$2,65 \cdot k^2$
11	$2,65 \cdot k^{11}$

11 vuoden kuluttua kahvipaketin hinta oli 4,25 €. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan prosenttikerroin *k*.

$$2,65 \cdot k^{11} = 4,25$$
$$k = 1,043877...$$

Päätellään kertoimesta prosentuaalinen kasvu.

$$1,043877... - 1 = 0,043877... = 4,3877...\ \% \approx 4,4\ \%$$

b) Vuodesta 2000 vuoteen 2016 on kulunut aikaa $2016 - 2000 = 16$ vuotta.

Merkitään hintojen laskua kuvaavaa prosenttikerrointa kirjaimella x eli gigatavun hinta kovalevyssä x-kertaistuu joka vuosi. 16 vuoden kuluttua hinta on $2,90 \cdot x^{16}$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x.

$$2,90 \cdot x^{16} = 0,10$$
$$x = \pm 0,81021...$$

Vain positiivinen luku kelpaa ratkaisuksi eli $x = 0,81021\ldots$

Päätellään kertoimesta prosentuaalinen muutos.

$$1 - 0,81021... = 0,18978... = 18,978...\,\% \approx 19\,\%$$

137.

Merkitään solujen määrän nousua kuvaavaa prosenttikerrointa kirjaimella *k*. Tällöin solut *k*-kertaistuvat joka tunti. 10 tunnin kuluttua soluja on $550 \cdot k^{10}$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan *k*.

$$550 \cdot k^{10} = 780$$
$$k = \pm 1,03555...$$

Vain positiivinen luku kelpaa ratkaisuksi eli $x = 1,03555\ldots$

Päätellään kertoimesta prosentuaalinen muutos.

$$1,03555... - 1 = 0,03555... = 3,555...\ \% \approx 3,6\ \%$$

Solujen määrä kasvoi joka tunti 3,6 %.

138.

Oletetaan, että tritium hajoaa joka kuukausi yhtä monta prosenttia.

Merkitään tritiumin alkuperäistä massaa kirjaimella m, joten 148 kuukauden kuluttua sen massa on 0,5 m. Merkitään tritiumin massan pienenemistä kuvaavaa prosenttikerrointa kirjaimella x eli tritiumin massa x-kertaistuu joka kuukausi. 148 kuukauden kuluttua massa on $m \cdot x^{148}$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x.

$$m \cdot x^{148} = 0,5m$$
$$x = \pm 0,9953275...$$

Vain positiivinen luku kelpaa ratkaisuksi eli $x = 0,9953275\ldots$

Päätellään kertoimesta kuukausittainen prosentuaalinen muutos.

$$1 - 0,9953275... = 0,0046724... = 0,46724...\ \% \approx 0,47\ \%$$

Tritiumista hajoaa 0,47 % yhden kuukauden aikana.

139.

Neljän vuoden kuluttua henkilöstöä on jäljellä $1844 - 350 = 1494$. Merkitään henkilöstön vähentämistä kuvaavaa prosenttikerrointa kirjaimella x eli henkilöstö x-kertaistuu joka vuosi. 4 vuoden kuluttua henkilöstöä on jäljellä $1\,844 \cdot x^4$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x.

$$1\,844 \cdot x^4 = 1\,494$$
$$x = \pm 0,94874...$$

Vain positiivinen luku kelpaa ratkaisuksi eli $x = 0,94874\ldots$ Päätellään kertoimesta prosentuaalinen muutos.

$$1 - 0,94874... = 0,05125... = 5,125...\,\% \approx 5,1\,\%$$

Vuotuinen vähentämistarve on 5,1 %.

140.

Viiden vuoden kuluttua sisäisen matkalipun hinta on
$3,20\ € + 0,80\ € = 4,0\ €$.

Merkitään hinnan nousua kuvaavaa prosenttikerrointa kirjaimella x eli lipun hinta x-kertaistuu joka vuosi. 5 vuoden kuluttua lipun hinta on
$3,20 \cdot x^5$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x.

$$3,20 \cdot x^5 = 4,0$$
$$x = 1,04563...$$

Päätellään kertoimesta prosentuaalinen muutos.

$$1,04563... - 1 = 0,04563... = 4,563...\ \% \approx 4,6\ \%$$

Lipun hintaa on korotettava joka vuosi 4,6 %.

141.

a) $-x^8 + 2 = -3$

$-x^8 = -5 \quad \big| : (-1)$

$x^8 = 5$

$x = \pm\sqrt[8]{5}$

b) $-2x^3 - 4 = -2$

$-2x^3 = 2 \quad \big| : (-2)$

$x^3 = -1$

$x = \sqrt[3]{-1}$

$x = -1$

c) $\frac{3x^4}{8} = 6 \quad \big| \cdot 8$

$3x^4 = 48 \quad \big| : 3$

$x^4 = 16$

$x = \pm\sqrt[4]{16}$

$x = \pm 2$

142.

a) Merkitään sivun pituutta kirjaimella r. Kuution tilavuus on r^3. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan r.

$$r^3 = 128$$
$$r = 5,03968...$$
$$r \approx 5,04$$

Kuution sivun pituus on 5,04 cm.

b) Kuutiossa on kuusi sivun neliön suuruista tahkoa. Lasketaan kuution kokonaispinta-ala.

$$A = 6 \cdot r^2 = 6 \cdot 5,04^2 = 152,4096 \approx 152$$

Kuution pinta-ala on 152 cm^2.

143.

a) Kuun säde lasketaan putoamiskiihtyvyyden ja massan avulla yhtälöstä $M(x) = 7,342 \cdot 10^{22}$.

$$M(x) = 7,342 \cdot 10^{22}$$

$$\frac{1,622 \cdot x^2}{6,674 \cdot 10^{-11}} = 7,342 \cdot 10^{22}$$

$$x = 1\,738\,100,427...$$

$$x \approx 1\,738\,000$$

Kuun säde on 1 738 000 m = 1738 km.

b) Lasketaan Jupiterin säde yhtälöstä $M(x) = 1,899 \cdot 10^{27}$.

$$M(x) = 1,899 \cdot 10^{27}$$

$$\frac{25,90 \cdot x^2}{6,674 \cdot 10^{-11}} = 1,899 \cdot 10^{27}$$

$$x = 69\,952\,896,451... \text{ m}$$

$$x = 69\,952,896... \text{ km}$$

Oletetaan, että Jupiter on pallon muotoinen. Lasketaan Jupiterin tilavuus yhtälöstä $V = \frac{4}{3} \cdot x^3$.

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot x^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 69\,952,896...^3 = 1,4338... \cdot 10^{15} \approx 1,434 \cdot 10^{15} \text{ km}^3$$

144.

Merkitään valmistuneiden määrää kuvaavaa prosenttikerrointa kirjaimella x eli valmistuneiden määrä x-kertaistuu joka vuosi. 6 vuoden kuluttua valmistuneita on $3900 \cdot x^6$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se.

$$3900 \cdot x^6 = 4500$$
$$x = \pm 1,0241...$$

Vain positiivinen luku kelpaa ratkaisuksi eli $x = 1,0241\ldots$ Päätellään kertoimesta prosentuaalinen muutos.

$$1,0241... - 1 = 0,0241... = 2,41... \,\% \approx 2,4\,\%$$

Vuotuiseksi kasvutavoitteeksi on asetettava 2,4 %.

145.

a) Merkitään koiran aivojen massaa kirjaimella x ja sijoitetaan kaavaan $EQ = 1{,}0$ ja kehon massa on 10. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x.

$$1{,}0 = \frac{x}{0{,}012 \cdot (10)^{\frac{2}{3}}}$$

$$x = 0{,}05569...$$

$$x \approx 0{,}056 \text{ kg} = 56 \text{ g}$$

b) Sijoitetaan tunnetut arvot kaavaan ja merkitään kehon massaa kirjaimella x. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x.

$$7{,}5 = \frac{1{,}35}{0{,}012 \cdot x^{\frac{2}{3}}}$$

$$x = 58{,}094...$$

$$x \approx 58 \text{ kg}$$

2.4 Sovelluksia

146.

a) Mittaushetkeä kuvaa muuttujan arvo $x = 0$. Sijoitetaan arvo funktioon h.

$h(0) = 13,0 \cdot 0,985^0 = 13,0 \text{ mg/l}$

b) Lammen happipitoisuuden muutos voidaan päätellä muutosta kuvaavasta prosenttikertoimesta 0,985.

$1 - 0,985 = 0,015 = 1,5\ \%$

c) Happipitoisuus 12 kuukauden kuluttua saadaan sijoittamalla $x = 12$ funktioon h.

$h(12) = 13,0 \cdot 0,985^{12} = 10,843... \approx 10,8 \text{ mg/ l}$

d) Muodostetaan epäyhtälö $h(x) < 5$ ja ratkaistaan siitä x.

$$h(x) < 5$$
$$13,0 \cdot 0,985^x < 5$$
$$x > 63,221...$$

Joten 64 kuukauden kuluttua happipitoisuus alittaa 5,00 mg/l rajan.

147.

a) Populaation tilanne 24 tunnin kuluttua saadaan sijoittamalla $t = 24$ funktioon N.

$$N(24) = 1000 \cdot 1,25^{24} = 211\,758,236... \approx 212\,000$$

b) Populaation kasvu voidaan päätellä muutosta kuvaavasta prosenttikertoimesta 1,25.

$$1,25 - 1 = 0,25 = 25\ \%$$

Populaatio kasvaa 25 % joka tunti.

c) Muodostetaan epäyhtälö $N(t) > 1\,000\,000$ ja ratkaistaan siitä t.

$$\begin{aligned} N(t) &> 1\,000\,000 \\ 1000 \cdot 1,25^t &> 1\,000\,000 \\ t &> 30,9565... \end{aligned}$$

Populaation koko ylittää miljoonan 31 tunnissa.

148.

a) Virusten määrän muutos voidaan päätellä muutosta kuvaavasta prosenttikertoimesta $e^{0,05}$.

$$e^{0,05} - 1 = 0,05127... = 5,127...\,\% \approx 5,1\,\%$$

Virusten määrä kasvaa 5,1 % tunnissa.

b) Virusten määrä 24 tunnin kuluttua saadaan sijoittamalla $x = 24$ funktioon f.

$$f(24) = 150 \cdot e^{0,05 \cdot 24} = 498,017... \approx 500$$

24 tunnin kuluttua potilaassa on 500 virusta.

c) Lasketaan x epäyhtälöstä $f(x) > 2\,000$.

$$\begin{aligned} f(x) &> 2\,000 \\ 150 \cdot e^{0,05x} &> 2\,000 \\ x &> 51,805... \end{aligned}$$

52 tunnin kuluttua virusten määrä ylittää 2000.

149.

a) Merkitään sijoitus summaa kirjaimella a ($a > 0$). Sijoitus on kaksinkertaistunut, kun pääoma on $2a$.

Koska summa kasvaa 2,4 % vuodessa, se 1,024-kertaistuu joka vuosi.

Merkitään kysyttyjen vuosien määrää kirjaimella x, jolloin sijoituksen summa on x:n vuoden kuluttua $a \cdot 1,024^x$.

Merkitään lauseke yhtä suureksi kuin $2a$ ja ratkaistaan yhtälöstä x.

$$a \cdot 1,024^x = 2a$$
$$x = 29,2263...$$
$$x \approx 29$$

Sijoitus kaksinkertaistuu 29 vuodessa.

b) Merkitään kasvua kuvaavaa prosenttikerrointa kirjaimella k. Summa siis k-kertaistuu vuosittain. 15 vuoden kuluttua summa on $a \cdot k^{15}$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä k.

$$a \cdot k^{15} = 2a$$
$$k = 1,04729...$$

Vuotuisen korotuksen on siis oltava

$$1,04729... - 1 = 0,04729... = 4,729... \% \approx 4,7 \%$$

150.

a) Merkitään asuntojen määrää kirjaimella a ($a > 0$). Asuntojen määrä on kasvanut 5,0 %, kun asuntoja on $1{,}05a$.

Koska asuntokanta kasvaa 0,20 % vuodessa, se 1,002-kertaistuu joka vuosi.

Merkitään kysyttyjen vuosien määrää kirjaimella x, jolloin asuntojen määrä x:n vuoden kuluttua on $a \cdot 1{,}002^x$.

Merkitään lauseke yhtä suureksi kuin $1{,}05a$ ja ratkaistaan yhtälöstä x.

$$a \cdot 1{,}002^x = 1{,}05a$$
$$x = 24{,}419...$$
$$x \approx 24$$

24 vuoden kuluttua asuntojen määrä on kasvanut 5,0 %.

b) Merkitään kasvua kuvaavaa prosenttikerrointa kirjaimella k. Summa siis k-kertaistuu vuosittain. 10 vuoden kuluttua summa on $a \cdot k^{10}$. Asuntojen määrä on kasvanut 4,0 %, kun asuntoja on $1{,}04a$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä k.

$$a \cdot k^{10} = 1{,}04a$$
$$k = \pm 1{,}003929...$$

Ratkaisuksi käy vain positiivinen luku, joten $k = 1{,}003929\ldots$
Vuotuisen kasvun on siis oltava

$$1{,}003929... - 1 = 0{,}003929... = 0{,}3929...\ \% \approx 0{,}39\ \%$$

151.

a) Merkitään alkuperäistä liikevaihtoa kirjaimella a.

Kahdenkymmen vuoden jälkeen liikevaihto on $10a$.

Merkitään kasvua kuvaavaa prosenttikerrointa kirjaimella k.

Liikevaihto siis k-kertaistui joka vuosi. 20 vuoden kuluttua liikevaihto on $a \cdot k^{20}$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä k.

$$a \cdot k^{20} = 10a$$
$$k = \pm 1{,}122018...$$

Ratkaisuksi käy vain positiivinen luku, joten $k = 1{,}122018\ldots$

Vuotuisen kasvun on siis oltava

$$1{,}122018... - 1 = 0{,}122018... = 12{,}2018...\ \% \approx 12{,}2\ \%$$

152.

Merkitään vuonna 1990 päästöjen määrää kirjaimella a.

2008 – 1990 = 18 vuoden päästä päästöjen määrä oli 39 % suuremmat eli $1{,}39a$.

Merkitään kasvua kuvaavaa prosenttikerrointa kirjaimella k.

Päästöjen määrä k-kertaistui vuosittain. 18 vuoden kuluttua päästöt ovat $a \cdot k^{18}$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä k.

$$a \cdot k^{18} = 1{,}39a$$
$$k = \pm 1{,}018463...$$

Ratkaisuksi käy vain positiivinen luku, joten $k = 1{,}018463\ldots$

Vuotuisen kasvun on siis oltava

$$1{,}018463... - 1 = 0{,}018463... = 1{,}8463...\ \% \approx 1{,}85\ \%$$

2015 – 1990 = 25 vuoden päästä päästöjä on:

$$a \cdot 1{,}0185^{25} = 1{,}5813...a \approx 1{,}58a$$

Lasketaan, kuinka monta prosenttia vuoden 2015 päästöt ovat verrattuna vuoden 1990 päästöihin.

$$\frac{1{,}58a - a}{a} = \frac{0{,}58a}{a} = 0{,}58 = 58\ \%$$

153.

a) Merkitään liikevaihdon kasvua kuvaavaa prosenttikerrointa kirjaimella k eli liikevaihto k-kertaistuu joka vuosi.

Vuodet	Liikevaihto (milj. €)
0	58
1	$58 \cdot k$
2	$58 \cdot k^2$
3	$58 \cdot k^3$

Viiden vuoden kuluttua liikevaihto on siis $58 \cdot k^5$ (milj. €).

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä k.

$$58 \cdot k^5 = 110$$
$$k = 1{,}136561...$$

Vuotuisen kasvun on siis oltava

$$1{,}136561.. - 1 = 0{,}136561... = 13{,}6561...\ \% \approx 14\ \%$$

b) Merkitään vuosia kirjaimella x. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä x.

$$58 \cdot 1{,}136561...^x = 190$$
$$x = 9{,}26965...$$
$$x \approx 9{,}3$$

9,3 vuoden kuluttua liikevaihdon ennustetaan olevan 190 miljoonaa euroa.

154.

a) Merkitään majavien määrän kasvua kuvaavaa prosenttikerrointa kirjaimella k eli majavien määrä k-kertaistuu joka vuosi.

Vuosi 1930 lähtien	Majavien määrä
0	60
1	$60 \cdot k$
2	$60 \cdot k^2$
3	$60 \cdot k^3$

Viidenkymmenen vuoden päästä majavien määrä on siis $60 \cdot k^{50}$.
Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan k.

$$60 \cdot k^{50} = 4\,000$$
$$k = \pm 1,087622...$$

Koska vain positiivinen luku kelpaa ratkaisuksi, $k = 1,087622\ldots$

Vuotuisen kasvun on siis oltava

$$1,087622.. - 1 = 0,087622... = 8,7622...\,\% \approx 8,8\,\%$$

b) Merkitään vuosia kirjaimella x. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä x.

$$60 \cdot 1,087622478...^{x} = 12\,000$$
$$x = 63,07964...$$
$$x \approx 63$$

63 vuodessa kanta kasvaa 12 000 majavaan.

155.

Merkitään väkiluvun kasvua kuvaavaa prosenttikerrointa kirjaimella *k* eli väkiluku *k*-kertaistuu joka vuosi.

Vuosi 2004 lähtien	Väkiluku (mrd.)
0	6,4
1	$6,4 \cdot k$
2	$6,4 \cdot k^2$
3	$6,4 \cdot k^3$

Vuodesta 2004 vuoteen 2010 on 6 vuotta. 2010 väkiluku on $6,4 \cdot k^6$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan *k*.

$$6,4 \cdot k^6 = 6,8$$
$$k = \pm 1,0101553...$$

Koska vain positiivinen luku kelpaa ratkaisuksi, $k = 1,0101553\ldots$

Nyt tiedetään väkiluvun kasvua kuvaava prosenttikerroin.

Merkitään vuosien määrää kirjaimella *x*.

Lasketaan, kuinka monta vuotta menee, että väkiluku ylittää 10 miljardia.

$$6,4 \cdot 1,0101553...^x > 10$$
$$x > 44,16888$$

Joten vuosia pitää olla 45. Lasketaan, mikä vuosi on tuolloin.

$$2004 + 45 = 2049$$

156.

Merkitään aktiivisuuden laskua kuvaavaa prosenttikerrointa kirjaimella *k* eli aktiivisuus *k*-kertaistuu joka vuorokausi.

Vuorokausi	Aktiivisuus (kBq)
0	$25,0$
1	$25,0 \cdot k$
2	$25,0 \cdot k^2$
3	$25,0 \cdot k^3$

Viiden vuorokauden kuluttua näytteen aktiivisuus on $25,0 \cdot k^5$.
Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan *k*.

$$25,0 \cdot k^5 = 16,2$$
$$k = 0,9168852...$$

Aktiivisuus on pudonnut puoleen, kun aktiivisuus on
$\frac{25,0 \text{ kBq}}{2} = 12,5 \text{ kBq}$.

Merkitään vuorokausia kirjaimella *x*. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan *x*.

$$25,0 \cdot 0,916885281...^x = 12,5$$
$$x = 7,988058...$$
$$x \approx 8,0$$

Puoliintumisaika on 8 vuorokautta.

Kymmenen vuorokautta ennen ensimmäistä mittausta näytteen aktiivisuus on

$25,0 \cdot 0,9168852...^{-10} = 59,5374... \approx 59,5 \text{ kBq}$.

157.

a) Merkitään alkuperäistä eliniänodotetta kirjaimella a. 50 vuoden kuluttua eliniänodote siis $1{,}175a$.

Merkitään vuotuista kasvamista kuvaavaa prosenttikerrointa kirjaimella k eli eliniänodote k-kertaistuu joka vuosi. 50 vuoden kuluttua se on $a \cdot k^{50}$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan k.

$$a \cdot k^{50} = 1{,}175a$$
$$k = \pm 1{,}00323057...$$

Koska vain positiivinen luku kelpaa ratkaisuksi, $k = 1{,}00323057\ldots$

Vuotuinen kasvu on siis
$1{,}00323057... - 1 = 0{,}00323057... = 0{,}323057...\,\% \approx 0{,}323\,\%$

b) Merkitään kysyttyä aikaa kirjaimella x eli eliniänodote on x:n vuoden kuluttua $a \cdot 1{,}00323057...^{x}$.

Kun eliniänodote on kaksinkertainen, se on $2a$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä x.

$$a \cdot 1{,}00323057...^{x} = 2a$$
$$x = 214{,}905...$$
$$x \approx 215$$

Eliniänodote kaksinkertaistuu 215 vuodessa.

158.

a) Merkataan nykyisiä päästöjen määrää kirjaimella a. 4 vuoden kuluttua päästöjen määrä on $0{,}8a$.

Merkitään vuotuista vähenemistä kuvaavaa prosenttikerrointa kirjaimella k eli päästöjen määrä k-kertaistuu joka vuosi. 4 vuoden kuluttua se on $a \cdot k^4$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan k.

$$a \cdot k^4 = 0{,}8a$$
$$k = \pm 0{,}94574160...$$

Koska vain positiivinen luku kelpaa ratkaisuksi, $k = 0{,}94574160\ldots$

Vuotuinen väheneminen on siis
$1 - 0{,}94574160... = 0{,}054258390... = 5{,}4258390...\,\% \approx 5{,}4\,\%$

b) Merkitään kysyttyä aikaa kirjaimella x eli päästöjen määrä on x:n vuoden kuluttua $a \cdot 0{,}94574160...^x$

Kun päästöt on saatu vähenemään alle puoleen, se on $0{,}5a$.

Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan siitä x.

$$a \cdot 0{,}94574160...^x < 0{,}5a$$
$$x > 12{,}425...$$

Päästöjen määrä vähenee alle puoleen 13 vuoden kuluttua.

159.

a) Merkataan nykyistä rakettien nopeutta kirjaimella a. 50 vuoden kuluttua rakettien nopeus on $2a$.

Merkitään vuotuista kasvamista kuvaavaa prosenttikerrointa kirjaimella k eli raketin nopeus k-kertaistuu joka vuosikymmen. 50 vuoden kuluttua se on $a \cdot k^5$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan k.

$$a \cdot k^5 = 2a$$
$$k = 1{,}14869835...$$

Vuosikymmenessä rakettien nopeus kasvaa
$1{,}14869835... - 1 = 0{,}14869835... = 14{,}869835...\,\% \approx 15\,\%$.

b) Merkitään kysyttyä aikaa kirjaimella x eli rakettien nopeus on x:n vuosikymmenen kuluttua $a \cdot 1{,}14869835...^x$

Kun nopeus on vähintään kymmenkertainen, se on $10a$.

Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan siitä x.

$$a \cdot 1{,}14869835...^x > 10a$$
$$x > 16{,}609...$$

Rakettien nopeus kymmenkertaistuu 170 vuodessa.

160.

a) Alkuhetkeä kuvaa muuttujan arvo $t = 0$. Sijoitetaan arvo funktioon f.

$$f(0) = 383 \cdot 1,0104^0 = 383 \text{ (ppm)}$$

b) Muodostetaan yhtälö $f(t) = 300$ ja ratkaistaan siitä t.

$$\begin{aligned} f(t) &= 300 \\ 383 \cdot 1,0104^t &= 300 \\ t &= -23,6077... \\ t &\approx -24 \end{aligned}$$

c) Pitoisuuden arvo 25 vuoden kuluttua saadaan sijoittamalla arvo $t = 25$ funktioon f.

$$f(25) = 383 \cdot 1,0104^{25} = 496,0577... \approx 496 \text{ (ppm)}$$

161.

a) Merkitään nykyistä palkkaa kirjaimella a. 5 vuoden kuluttua palkka on $1{,}048a$.

Merkitään vuotuista kasvamista kuvaavaa prosenttikerrointa kirjaimella k eli palkka k-kertaistuu joka vuosi. Viiden vuoden kuluttua se on $a \cdot k^5$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan k.

$$a \cdot k^5 = 1{,}048a$$
$$k = 1{,}009420816...$$

Vuotuinen palkankorotusprosentti on

$1{,}009420816... - 1 = 0{,}009420816... = 0{,}9420816...\,\% \approx 0{,}94\,\%$.

b) Merkitään nykyistä palkkaa kirjaimella a. 3 vuoden kuluttua palkka on $1{,}04a$.

Merkitään vuotuista kasvamista kuvaavaa prosenttikerrointa kirjaimella k eli palkka k-kertaistuu joka vuosi. Kolmen vuoden kuluttua se on $a \cdot k^3$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan k.

$$a \cdot k^3 = 1{,}04a$$
$$k = 1{,}0131594...$$

Vuotuinen palkankorotusprosentti on

$1{,}0131594... - 1 = 0{,}0131594... = 1{,}31594...\,\% \approx 1{,}3\,\%$.

162.

a) Merkitään alkuperäistä käyttäjämäärää kirjaimella a. Kolmen vuoden kuluttua käyttäjämäärä on $0{,}6a$.

Merkitään vuotuista vähenemistä kuvaavaa prosenttikerrointa kirjaimella k eli käyttäjämäärä k-kertaistuu joka vuosi. 3 vuoden kuluttua se on $a \cdot k^3$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan k.

$$a \cdot k^3 = 0{,}6a$$
$$k = 0{,}84343266...$$

Vuotuinen väheneminen on siis

$1 - 0{,}84343266... = 0{,}15656733... = 15{,}656733...\ \% \approx 16\ \%$.

b) Merkitään kysyttyä aikaa kirjaimella x eli kävijämäärä on x:n vuoden kuluttua $a \cdot 0{,}84343266...^x$.

Kun käyttäjämäärä on 20 %, se on $0{,}2a$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x.

$$a \cdot 0{,}84343266...^x = 0{,}2a$$
$$x = 9{,}45197...$$
$$x \approx 9$$

Yhdeksän vuoden kuluttua Facebook-palvelun käyttäjiä on 20 % 13-vuotiaista.

163.

a) Merkitään alkuperäistä C-14-pitoisuutta kirjaimella a. 5730 vuoden päästä C-14-pitoisuus on $0{,}5a$.

Merkitään vuotuista vähenemistä kuvaavaa prosenttikerrointa kirjaimella k eli C-14-pitoisuus k-kertaistuu joka vuosikymmen. 5730 vuoden kuluttua se on $a \cdot k^{573}$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan k.

$$a \cdot k^{573} = 0{,}5a$$
$$k = 0{,}99879105...$$

Merkitään kysyttyä aikaa kirjaimella x eli C-14-pitoisuus on x:n vuosikymmenen kuluttua $a \cdot 0{,}99879105..^{x}$.

Kun C-14-pitoisuus on 9 %, se on $0{,}09a$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x.

$$a \cdot 0{,}99879105^{x} = 0{,}09a$$
$$x = 1990{,}561...$$
$$x \approx 2000$$

Hain hammas on 2000 vuotta vanha.

3 Lukujonot matemaattisena mallina

3.1 Aritmeettinen ja geometrinen jono

164.

a) Lukujono on aritmeettinen jono, jonka yleinen jäsen on

$$\begin{aligned} a_n &= 3 + (n-1) \cdot 4 \\ &= 3 + 4n - 4 \\ &= 4n - 1 \end{aligned}$$

b) Lukujono on geometrinen jono, jonka yleinen jäsen on

$$\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

c) Lukujono on geometrinen lukujono, jonka yleinen jäsen on

$$-4 \cdot 2^{n-1}$$

d) Ei kumpikaan.

165.

a) Aritmeettisen jonon yleisen jäsenen muodostamiseksi tarvitaan:

- jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = -6$
- differenssi $d = -3 - (-6) = 3$.

Muodostetaan jonon yleisen jäsenen lauseke.

$$\begin{aligned} a_n &= -6 + (n-1) \cdot 3 \\ &= -6 + 3n - 3 \\ &= 3n - 9 \end{aligned}$$

Lasketaan lukujonon 20. jäsen sijoittamalla järjestysluku yleisen jäsenen lausekkeeseen.

$$a_{20} = 3 \cdot 20 - 9 = 51$$

b) Geometrisen jonon yleisen jäsenen muodostamiseksi tarvitaan:

- jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = -6$
- suhdeluku $q = \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2}$

Muodostetaan jonon yleisen jäsenen lauseke.

$$a_n = -6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Lasketaan jonon 5. jäsen sijoittamalla järjestysluku yleisen jäsenen lausekkeeseen.

$$a_5 = -6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5-1} = -6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = -6 \cdot \frac{1}{16} = -\frac{6}{16} = -\frac{3}{8}$$

166.

a) Aritmeettisen jonon yleisen jäsenen muodostamiseksi tarvitaan:

- jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 3$
- differenssi $d = -2 - 3 = -5$.

Muodostetaan jonon yleisen jäsenen lauseke.

$$\begin{aligned} a_n &= 3 + (n-1) \cdot (-5) \\ &= 3 - 5n + 5 \\ &= -5n + 8 \end{aligned}$$

Lasketaan lukujonon 10. jäsen sijoittamalla järjestysluku yleisen jäsenen lausekkeeseen.

$$a_{10} = -5 \cdot 10 + 8 = -42$$

b) Aritmeettisen jonon yleisen jäsenen muodostamiseksi tarvitaan:

- jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = \frac{1}{3}$
- differenssi $d = \overset{3)}{\frac{1}{2}} - \overset{2)}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$

Muodostetaan jonon yleisen jäsenen lauseke.

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{3} + (n-1) \cdot \frac{1}{6} \\
&= \overset{2)}{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}n - \frac{1}{6}} \\
&= \frac{1}{6}n + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{6}n + \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

Lasketaan lukujonon 10. jäsen sijoittamalla järjestysluku yleisen jäsenen lausekkeeseen.

$$a_{10} = \frac{1}{6} \cdot 10 + \frac{1}{6} = \frac{10}{6} + \frac{1}{6} = \frac{11}{6}$$

167.

a) Geometrisen jonon yleisen jäsenen muodostamiseksi tarvitaan:

- jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 5$
- suhdeluku $q = \frac{10}{5} = 2$.

Muodostetaan jonon yleisen jäsenen lauseke.

$a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$

Lasketaan jonon 4. jäsen sijoittamalla järjestysluku yleisen jäsenen lausekkeeseen.

$a_4 = 5 \cdot 2^{4-1} = 5 \cdot 2^3 = 5 \cdot 8 = 40$

b) Geometrisen jonon yleisen jäsenen muodostamiseksi tarvitaan:

- jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = \frac{1}{4}$
- suhdeluku $q = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{1} = \frac{12}{4} = 3$

Muodostetaan jonon yleisen jäsenen lauseke.

$$a_n = \frac{1}{4} \cdot 3^{n-1}$$

Lasketaan jonon 4. jäsen sijoittamalla järjestysluku yleisen jäsenen lausekkeeseen.

$$a_4 = \frac{1}{4} \cdot 3^{4-1} = \frac{1}{4} \cdot 3^3 = \frac{1}{4} \cdot 27 = \frac{27}{4}$$

168.

a) Jonon kolmannelle jäsenelle voidaan muodostaa lauseke ensimmäisen jäsenen ja differenssin avulla.

$$a_3 = -4 + (3-1) \cdot d = -4 + 2d$$

Kolmannen jäsenen arvo tunnetaan, joten muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan differenssi d.

$$\begin{aligned} a_3 &= 6 \\ -4 + 2d &= 6 \\ 2d &= 10 \qquad \big| : 2 \\ d &= 5 \end{aligned}$$

Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$$a_n = -4 + (n-1) \cdot 5 = -4 + 5n - 5 = 5n - 9$$

b) Muodostetaan yleisen jäsenen avulla yhtälö ja tutkitaan, voiko luku 26 olla jonon jäsen.

$$\begin{aligned} a_n &= 26 \\ 5n - 9 &= 26 \\ 5n &= 35 \qquad \big| : 5 \\ n &= 7 \end{aligned}$$

Koska ratkaisuksi saatu n:n arvo on positiivinen kokonaisluku, luku 26 on lukujonon jäsen.

c) Muodostetaan epäyhtälö $a_n < 40$ ja ratkaistaan siitä n.

$$\begin{aligned} 5n - 9 &< 40 \\ 5n &< 49 \qquad \big| : 5 \\ n &< \frac{49}{5} = 9\frac{4}{5} \end{aligned}$$

Suurin kokonaisluku, joka toteuttaa epäyhtälön ratkaisun on 9, joten jonon 9 ensimmäistä jäsentää ovat pienempiä kuin 40.

169.

a) Jonon viidennelle jäsenelle voidaan muodostaa lauseke ensimmäisen jäsenen ja differenssin avulla.

$$a_3 = 2 + (5-1) \cdot d = 2 + 4d$$

Viidennen jäsenen arvo tunnetaan, joten muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan differenssi d.

$$\begin{aligned} a_5 &= -6 \\ 2 + 4d &= -6 \\ 4d &= -8 \qquad \big| : 4 \\ d &= -2 \end{aligned}$$

b) Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$$a_n = 2 + (n-1) \cdot (-2) = 2 + (-2n + 2) = -2n + 4$$

Lasketaan jonon 500. jäsen sijoittamalla järjestysluku yleisen jäsenen lausekkeeseen.

$$a_{500} = -2 \cdot 500 + 4 = -1000 + 4 = -996$$

c) Muodostetaan yleisen jäsenen avulla yhtälö ja tutkitaan, voiko luku −38 olla jonon jäsen.

$$\begin{aligned} a_n &= -38 \\ -2n + 4 &= -38 \\ -2n &= -42 \qquad \big| : (-2) \\ n &= 21 \end{aligned}$$

Koska ratkaisuksi saatu n:n arvo on positiivinen kokonaisluku, luku −38 on lukujonon jäsen.

170.

a) Jonon viidennelle jäsenelle voidaan muodostaa lauseke toisen jäsenen ja differenssin avulla.

$$a_5 = 3 + (5-2) \cdot d = 3 + 3d$$

Viidennen jäsenen arvo tunnetaan, joten muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan differenssi d.

$$\begin{aligned} a_5 &= 15 \\ 3 + 3d &= 15 \\ 3d &= 12 \qquad \vert : 3 \\ d &= 4 \end{aligned}$$

Jonon toiselle jäsenelle voidaan muodostaa lauseke ensimmäisen jäsenen ja differenssin avulla.

$$a_2 = a_1 + (2-1) \cdot 4 = a_1 + 4$$

Toisen jäsenen arvo tunnetaan, joten muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan jonon ensimmäinen jäsen.

$$\begin{aligned} a_2 &= 3 \\ a_1 + 4 &= 3 \\ a_1 &= -1 \end{aligned}$$

b) Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$$a_n = -1 + (n-1) \cdot 4 = -1 + 4n - 4 = 4n - 5$$

Lasketaan, kuinka monta jonon jäsenistä on pienempää kuin luku 50. Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan n.

$$\begin{aligned} a_n &< 50 \\ 4n - 5 &< 50 \\ 4n &< 55 \qquad \big| : 4 \\ n &< \frac{55}{4} = 13\frac{3}{4} \end{aligned}$$

13 ensimmäistä jäsentä on pienempää kuin 50, joten 14. jäsen on ensimmäinen jäsen, joka on suurempi kuin 50.

171.

a) Lukujonon kahden peräkkäisen jäsenen erotus on 3 eli differenssi $d = 3$.

Jonon kolmannelle jäsenelle voidaan muodostaa lauseke ensimmäisen jäsenen ja differenssin avulla.

$$a_3 = a_1 + (3-1) \cdot 3 = a_1 + 6$$

Kolmannen jäsenen arvo tunnetaan, joten muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan jonon ensimmäinen jäsen.

$$\begin{aligned} a_3 &= 9 \\ a_1 + 6 &= 9 \\ a_1 &= 3 \end{aligned}$$

Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$$a_n = 3 + (n-1) \cdot 3 = 3 + 3n - 3 = 3n$$

b) Lukujonon kahden peräkkäisen jäsenen suhde on 3 eli suhdeluku $q = 3$.

Jonon kolmannelle jäsenelle voidaan muodostaa lauseke ensimmäisen jäsenen ja differenssin avulla.

$$a_3 = a_1 \cdot 3^{3-1} = a_1 \cdot 3^2 = a_1 \cdot 9$$

Kolmannen jäsenen arvo tunnetaan, joten muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan jonon ensimmäinen jäsen.

$$\begin{aligned} a_3 &= 9 \\ a_1 \cdot 9 &= 9 \qquad \big| : 9 \\ a_1 &= 1 \end{aligned}$$

Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$$a_n = 1 \cdot 3^{n-1} = 3^{n-1}$$

172.

a) Geometrisen jonon yleisen jäsenen muodostamiseksi tarvitaan:

- jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = -4$
- suhdeluku $q = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$

Muodostetaan jonon yleisen jäsenen lauseke.

$$a_n = -4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

b) Lasketaan jonon 9. jäsen sijoittamalla järjestysluku yleisen jäsenen lausekkeeseen.

$$a_4 = -4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{9-1} = -\frac{6\,561}{16\,384} \approx -0,400$$

c) Muodostetaan epäyhtälö $a_n < -0,001$ ja ratkaistaan n.

$$-4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} < -0,001$$

$$n < 29,830...$$

29 ensimmäistä jonon jäsentä on pienempi kuin −0,001.

173.

a) Yleisen jäsenen muodostamiseksi tarvitaan jonon ensimmäinen jäsen a_1 ja suhdeluku q. Kahden tiedon selvittämiseksi tarvitaan kaksi yhtälöä.

Kirjoitetaan jonon kolmas ja seitsemäs jäsen ensimmäisen jäsenen ja suhdeluvun avulla.

$$a_3 = a_1 \cdot q^{3-1} = a_1 \cdot q^2$$
$$a_7 = a_1 \cdot q^{7-1} = a_1 \cdot q^6$$

Koska $a_3 = 1$ ja $a_7 = 16$, saadaan kaksi yhtälöä, jotka molemmat pitävät paikkansa samalla lukujonolle.

Yhtälöistä voidaan muodostaa yhtälöpari.

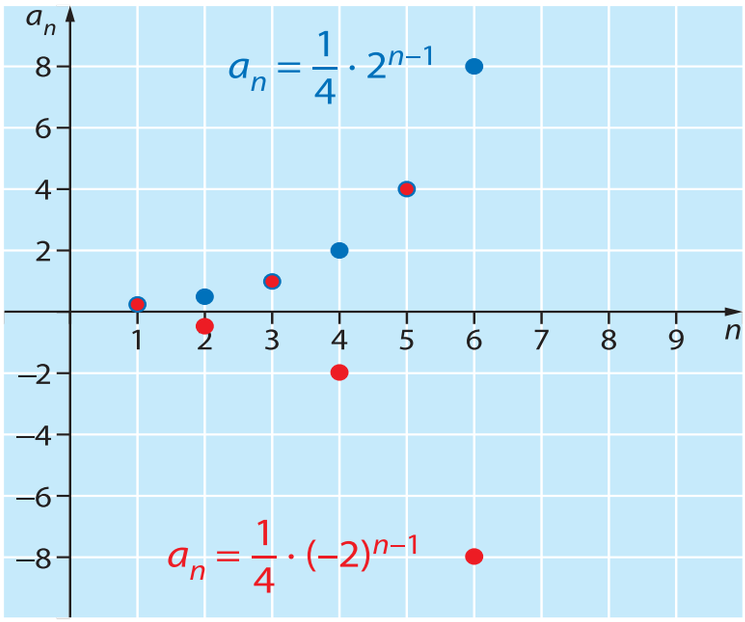
$$\begin{cases} a_3 = 1 \\ a_7 = 16 \end{cases}$$
$$\begin{cases} a_1 \cdot q^2 = 1 \\ a_1 \cdot q^6 = 16 \end{cases}$$
$$a_1 = \frac{1}{4} \text{ ja } q = 2 \quad \text{tai} \quad a_1 = \frac{1}{4} \text{ ja } q = -2$$

On siis olemassa kaksi lukujonoa, jotka toteuttavat annetut ehdot.

Lukujonon yleinen jäsen on:

$$a_n = \frac{1}{4} \cdot 2^{n-1} \quad \text{tai} \quad a_n = \frac{1}{4} \cdot (-2)^{n-1}$$

b) Piirretään lukujonot samaan koordinaatistoon.



Kuvaajien perusteella lukujonon $a_n = \frac{1}{4} \cdot 2^{n-1}$ arvot ovat aina positiivisia.

c) Kun jonon jäsenet ovat suurempia kuin 500 000, nämä toteuttavat ehdon $a_n > 500\,000$.

$$\frac{1}{4} \cdot 2^{n-1} > 500\,000$$

$$n > 21{,}9315...$$

Ensimmäinen positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa ehdon $n > 21{,}9315...$ on luku 22.

Lukujonon 22. jäsenestä alkaen jäsenet ovat siis suurempia kuin 500 000.

174.

a) Yleisen jäsenen muodostamiseksi tarvitaan jonon ensimmäinen jäsen a_1 ja suhdeluku q.

Kirjoitetaan jonon kolmas jäsen ensimmäisen jäsenen ja suhdeluvun avulla.

$$a_3 = a_1 \cdot q^{3-1} = a_1 \cdot q^2$$

Kolmannen jäsenen arvo tunnetaan, joten muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan jonon ensimmäinen jäsen.

$$a_3 = 4$$

$$a_1 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 4$$

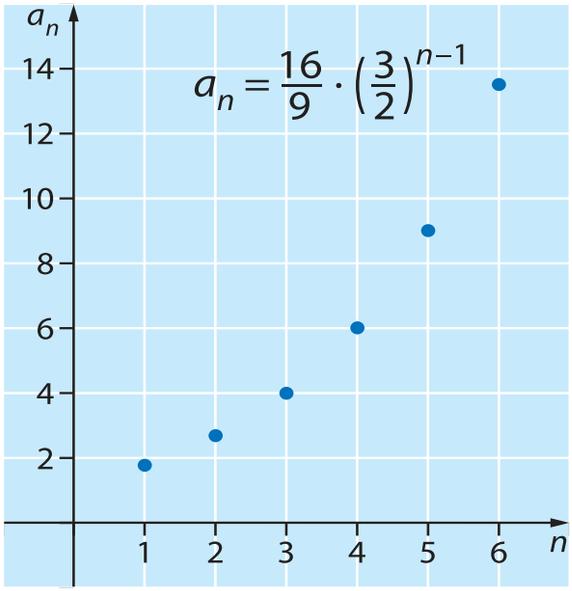
$$a_1 = \frac{16}{9}$$

Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$$a_n = \frac{16}{9} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

b) $a_9 = \frac{16}{9} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{9-1} = \frac{729}{16}$

c)



d) Kun jonon jäsenet ovat suurempia kuin 2000, nämä toteuttavat ehdon $a_n > 2\,000$.

$$\frac{16}{9} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} > 2\,000$$

$$n > 18,327...$$

Ensimmäinen positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa ehdon $n > 18,327...$ on luku 19.

Lukujonon 19. jäsenestä alkaen jäsenet ovat siis suurempia kuin 2000.

175.

a) Yleisen jäsenen muodostamiseksi tarvitaan jonon ensimmäinen jäsen a_1 ja differenssi d. Kahden tiedon selvittämiseksi tarvitaan kaksi yhtälöä.

Kirjoitetaan viides ja 132. jäsen ensimmäisen jäsenen ja differenssin avulla.

$$a_5 = a_1 + (5-1)\cdot d = a_1 + 4d$$
$$a_{132} = a_1 + (132-1)\cdot d = a_1 + 131d$$

Koska $a_5 = 45$ ja $a_{132} = 1061$, saadaan kaksi yhtälöä, jotka molemmat pitää paikkansa samalla lukujonolle.

Yhtälöstä voidaan muodostaa yhtälöpari.

$$\begin{cases} a_5 = 45 \\ a_{132} = 1061 \end{cases}$$
$$\begin{cases} a_1 + 4d = 45 \\ a_1 + 131d = 1061 \end{cases}$$

$a_1 = 13$ ja $d = 8$

Lukujonon yleinen jäsen on:

$$a_n = 13 + (n-1)\cdot 8 = 13 + 8n - 8 = 8n + 5$$

b) $a_{534} = 8 \cdot 534 + 5 = 4277$

c) Muodostetaan yleisen jäsenen avulla yhtälö ja tutkitaan, voiko luku 6933 olla jonon jäsen.

$$a_n = 6933$$
$$8n + 5 = 6933$$
$$n = 866$$

Koska vastaukseksi tuli positiivinen kokonaisluku, luku 6 933 on jonon jäsen.

d) Kun jonon jäsenet ovat pienempiä kuin 75 000, nämä toteuttavat ehdon $a_n < 75\,000$.

$$8n + 5 < 75\,000$$
$$n < 9374,375$$

Ensimmäinen positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa ehdon $n < 9\,374,375$ on luku 9374.

Lukujonon 9374 ensimmäistä jäsentä ovat pienempiä kuin 75 000.

176.

a) Yleisen jäsenen muodostamiseksi tarvitaan jonon ensimmäinen jäsen a_1 ja differenssi d. Kahden tiedon selvittämiseksi tarvitaan kaksi yhtälöä.

Kirjoitetaan toinen ja viides jäsen ensimmäisen jäsenen ja differenssin avulla.

$$a_5 = a_1 + (5-1)\cdot d = a_1 + 4d$$
$$a_2 = a_1 + (2-1)\cdot d = a_1 + d$$

Koska $a_5 = 16$ ja $a_2 = 2$, saadaan kaksi yhtälöä, jotka molemmat pitää paikkansa samalla lukujonolle.

Yhtälöstä voidaan muodostaa yhtälöpari.

$$\begin{cases} a_5 = 16 \\ a_2 = 2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} a_1 + 4d = 16 \\ a_1 + d = 2 \end{cases}$$

$$a_1 = -\frac{8}{3} \quad \text{ja} \quad d = \frac{14}{3}$$

Lukujonon yleinen jäsen on

$$a_n = -\frac{8}{3} + (n-1)\cdot\frac{14}{3} = \frac{14}{3}n - \frac{22}{3}.$$

b) Yleisen jäsenen muodostamiseksi tarvitaan jonon ensimmäinen jäsen b_1 ja suhdeluku q. Kahden tiedon selvittämiseksi tarvitaan kaksi yhtälöä.

Kirjoitetaan jonon toinen ja viides jäsen ensimmäisen jäsenen ja suhdeluvun avulla.

$$b_2 = b_1 \cdot q^{2-1} = b_1 \cdot q$$
$$b_5 = b_1 \cdot q^{5-1} = b_1 \cdot q^4$$

Koska $b_2 = 2$ ja $b_5 = 16$, saadaan kaksi yhtälöä, jotka molemmat pitävät paikkansa samalla lukujonolle.

Yhtälöistä voidaan muodostaa yhtälöpari.

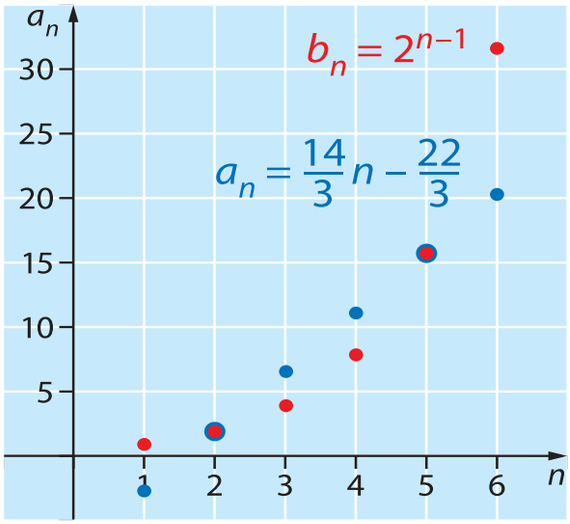
$$\begin{cases} b_2 = 2 \\ b_5 = 16 \end{cases}$$
$$\begin{cases} b_1 \cdot q = 2 \\ b_1 \cdot q^4 = 16 \end{cases}$$

$b_1 = 1$ ja $q = 2$

Lukujonon yleinen jäsen on:

$$b_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$$

c)



177.

a) Jono on aritmeettinen jono, koska seuraavaan kerrokseen tulee aina 4 juomalasia enemmän kuin edelliseen kerrokseen.

Jonon differenssi on siis $d = 4$ ja ensimmäinen jäsen on $a_1 = 1$.

Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$a_n = 1 + (n-1) \cdot 4 = 4n - 3$ (kpl)

b) Sijoitetaan $n = 23$ jonon yleiseen jäseneen.

$a_n = 4 \cdot 23 - 3 = 89$

Pyramidin 23. kerroksessa on 89 juomalasia.

c) Tutkitaan onko luku 50 jonon jäsen.

$$\begin{aligned} a_n &= 50 \\ 4n - 3 &= 50 \\ n &= 13,25 \end{aligned}$$

Koska ratkaisuksi ei tullut positiivinen kokonaisluku, luku 50 ei ole jonon jäsen. Rakennelman kerroksessa ei voi olla 50 lasia.

178.

a) Jonon ensimmäinen jäsen on kirjastojen määrä vuonna 2001 eli $a_1 = 989$.

Koska kirjastojen määrä vähenee vuosittain 16, jonon differenssi $d = -16$.

Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$$a_n = 989 + (n-1)\cdot(-16) = -16n + 1\,005$$

b) Koska vuoden 2001 kirjastojen määrä on lukujonon ensimmäinen jäsen, jäsenen järjestysluku saadaan, kun vuosiluvusta vähennetään 2000.

$$2015 - 2000 = 15$$

Tällöin vuoden 2015 kirjastojen määrä on jonon 15. jäsen.

$$a_{14} = -16\cdot 15 + 1\,005 = 765$$

c) Ratkaistaan ensin, kuinka mones lukujonon jäsen on arvoltaan yli 850.

$$\begin{aligned} a_n &> 850 \\ -16n + 1005 &> 850 \\ n &< 9,6875 \end{aligned}$$

Ensimmäinen positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa ehdon, on 9. Jonon 9 jäsen on vuoden $2000 + 9 = 2009$ kirjastojen määrä.

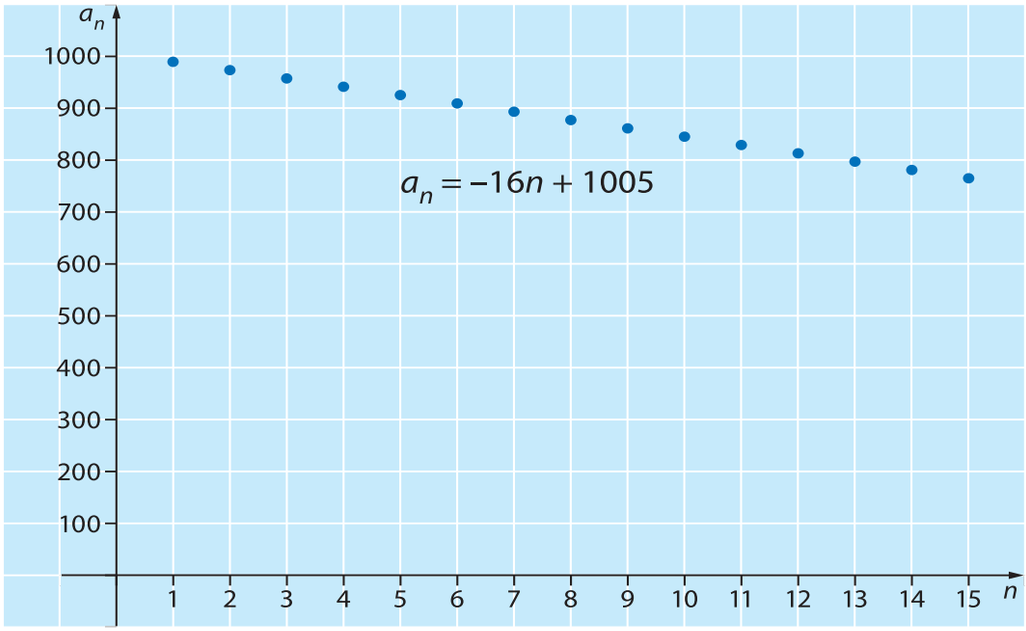
Ratkaistaan vielä, monesko lukujonon jäsen on pienempi kuin 950.

$$\begin{aligned} a_n &< 950 \\ -16n + 1005 &< 950 \\ n &> 3,4375 \end{aligned}$$

Ensimmäinen jäsen, joka toteuttaa ehdon on 4. Jonon 4 jäsen on vuoden $2000 + 4 = 2004$ kirjastojen määrä.

Kirjastojen määrä on 850–950 kpl vuosina 2004–2009.

d) Lukujonon kuvaajasta tulee näkyä jonon 15 ensimmäistä jäsentä.



179.

a) Koska aritmeettinen jono kuvataan ensimmäisen bussin lähdöstä, jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 0$.

Koska bussit kulkevat 13 minuutin välein, jonon differenssi $d = 13$ (min).

Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$a_n = 0 + (n-1) \cdot 13 = 13n - 13$ (min)

b) Sijoitetaan jonon yleiseen jäseneen n =20.

$a_{20} = 13 \cdot 20 - 13 = 247$ min

Jäsenen järjestysluku saadaan, kun kello 6.00 lisätään saatu minuuttimäärä.

$6.00 + 4.07\,(= 247 \text{ min}) = 10.07$

Kello 10.07 lähtee päivän 20. bussi.

c) Lasketaan monta minuuttia kello 22.02 on kello 6.00:sta.

$22.02 - 6.00 = 16.02 \text{ h} = 962 \text{ min}$

Lasketaan, kuinka mones jonon jäsen on 962 on.

$13n - 13 = 962$

$n = 75$

Päivän aikana tapahtuu 75 lähtöä.

180.

a) Jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 1500 - 80 = 1420$. Koska Artturi lyhentää lainaa 80 €:n maksuerissä, jonon differenssi on $d = -80$ (€).

Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$a_n = 1420 + (n-1) \cdot (-80) = -80n + 1500$ (€)

b) Lainan määrä 13 maksuerän jälkeen saadaan sijoittamalla $n = 13$ jonon yleiseen jäseneen.

$a_{13} = -80 \cdot 13 + 1500 = 460$ (€)

13 maksuerän jälkeen lainaa on jäljellä 460 €.

c) Lainan maksuerien määrä saadaan laskemalla, millä n:n arvolla $a_n = 0$.

$$-80n + 1500 = 0$$
$$n = 18,75$$

19 maksuerällä Artturi takaisin maksaa lainan.

d) Lasketaan, kuinka paljon lainaa on jäljellä 18. maksuerän jälkeen sijoittamalla $n = 18$ jonon yleiseen jäseneen.

$a_{18} = -80 \cdot 18 + 1500 = 60$ (€)

Viimeinen maksuerä on 60 €.

181.

a) Koska vapaa-ajan matkojen määrä lisääntyy vuosittain aina yhtä monta prosenttia, voidaan matkojen määriä kuvata geometrisen jonon avulla.

Lukujonon ensimmäinen jäsen on matkojen määrä vuonna 2015 eli $a_1 = 8\,137\,000$.

Matkojen määrä lisääntyy joka vuosi 2,6 %, joten prosenttikerroin eli jonon suhdeluku on

$100\,\% + 2,6\,\% = 102,6\,\% = 1,026$.

Muodostetaan lukujonon yleinen jäsen.

$a_n = 8\,137\,000 \cdot 1,026^{n-1}$

b) Lasketaan ensin kuinka mones jonon jäsen on vuoden 2020 ulkomaanmatkojen määrä.

$2020 - 2014 = 6$

Lasketaan jonon 6. jäsen.

$a_6 = 8\,137\,000 \cdot 1,026^{6-1} = 9\,251\,264,967... \approx 9\,251\,000$

c) Ratkaistaan epäyhtälö $a_n > 10\,000\,000$.

$$8\,137\,000 \cdot 1,026^{n-1} > 10\,000\,000$$
$$n > 9,03200...$$

Ensimmäinen positiivinen kokonaisluku, joka täyttää ehdon on 10.

Lasketaan minä vuonna suomalaisten ulkomaanmatkojen määrä on jonon 10. jäsen.

$$2014 + 10 = 2024$$

182.

a) Koska pääoma kasvaa joka vuosi 2,5 %, joten prosenttikerroin eli jonon suhdeluku on

$100\,\% + 2,5\,\% = 102,5\,\% = 1,025$

Lukujonon ensimmäinen jäsen on vuoden kuluttua oleva pääoma, joka on

$a_1 = 8000 \cdot 1,025 = 8200$.

Muodostetaan lukujonon yleinen jäsen.

$a_n = 8200 \cdot 1,025^{n-1} = 8200 \cdot 1,025^{-1} \cdot 1,025^n = 8000 \cdot 1,025^n$ (€)

b) Sijoitetaan jonon yleiseen jäseneen $n = 10$.

$a_{10} = 8000 \cdot 1,025^{10} = 10\,240,676... \approx 10\,241$ €

c) Ratkaistaan epäyhtälö $a_n > 12\,000$.

$8000 \cdot 1,025^n > 12\,000$

$n > 16,420...$

Ensimmäinen positiivinen kokonaisluku, joka täyttää ehdon on 17.
Sijoitustilillä on yli 12 000 € 17 vuoden kuluttua.

183.

a) Aritmeettisen jonon yleisen jäsenen muodostamiseksi tarvitaan:

- jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 2$
- differenssi $d = 6 - 2 = 4$

Muodostetaan jonon yleisen jäsenen lauseke.

$$\begin{aligned} a_n &= 2 + (n-1) \cdot 4 \\ &= 2 + 4n - 4 \\ &= 4n - 2 \end{aligned}$$

Lasketaan lukujonon 4. jäsen sijoittamalla järjestysluku yleisen jäsenen lausekkeeseen.

$$a_4 = 4 \cdot 4 - 2 = 14$$

b) Geometrisen jonon yleisen jäsenen muodostamiseksi tarvitaan:

- jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 2$
- suhdeluku $q = \frac{6}{2} = 3$

Muodostetaan jonon yleisen jäsenen lauseke.

$$a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$$

Lasketaan jonon 4. jäsen sijoittamalla järjestysluku yleisen jäsenen lausekkeeseen.

$$a_4 = 2 \cdot 3^{4-1} = 2 \cdot 3^3 = 2 \cdot 27 = 54$$

184.

a) Kahden tiedon selvittämiseksi tarvitaan kaksi yhtälöä.

Kirjoitetaan kolmas ja kuudes jäsen ensimmäisen jäsenen ja differenssin avulla.

$a_6 = a_1 + (6-1) \cdot d = a_1 + 5d$

$a_3 = a_1 + (3-1) \cdot d = a_1 + 2d$

Koska $a_6 = 5$ ja $a_3 = -1$, saadaan kaksi yhtälöä, jotka molemmat pitää paikkansa samalla lukujonolle.

Yhtälöstä voidaan muodostaa yhtälöpari.

$$\begin{cases} a_6 = 5 \\ a_3 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + 5d = 5 \\ a_1 + 2d = -1 \end{cases}$$

$a_1 = -5$ ja $d = 2$

b) Lukujonon yleinen jäsen on

$a_n = -5 + (n-1) \cdot 2 = -5 + 2n - 2 = 2n - 7$.

c) $a_{65} = 2 \cdot 65 - 7 = 123$

d) Muodostetaan yleisen jäsenen avulla yhtälö ja tutkitaan, voiko luku 103 olla jonon jäsen.

$$
\begin{aligned}
a_n &= 103 \\
2n - 7 &= 103 \\
2n &= 110 \qquad \big| : 2 \\
n &= 55
\end{aligned}
$$

Koska vastaukseksi tuli positiivinen kokonaisluku, luku 103 on jonon jäsen.

e) Kun jonon jäsenet ovat pienempiä kuin 80, nämä toteuttavat ehdon $a_n < 80$.

$$
\begin{aligned}
2n - 7 &< 80 \\
2n &< 87 \qquad \big| : 2 \\
n &< \frac{87}{2} = 43\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Ensimmäinen positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa ehdon on luku 43. Lukujonon 43 ensimmäistä jäsentä ovat pienempiä kuin 80.

185.

a) Yleisen jäsenen muodostamiseksi tarvitaan jonon ensimmäinen jäsen a_1 ja suhdeluku q. Kahden tiedon selvittämiseksi tarvitaan kaksi yhtälöä.

Kirjoitetaan jonon kolmas ja kuudes jäsen ensimmäisen jäsenen ja suhdeluvun avulla.

$$a_3 = a_1 \cdot q^{3-1} = a_1 \cdot q^2$$
$$a_7 = a_1 \cdot q^{6-1} = a_1 \cdot q^5$$

Koska $a_3 = \frac{1}{3}$ ja $a_6 = \frac{64}{375}$, saadaan kaksi yhtälöä, jotka molemmat pitävät paikkansa samalla lukujonolle. Yhtälöistä voidaan muodostaa yhtälöpari.

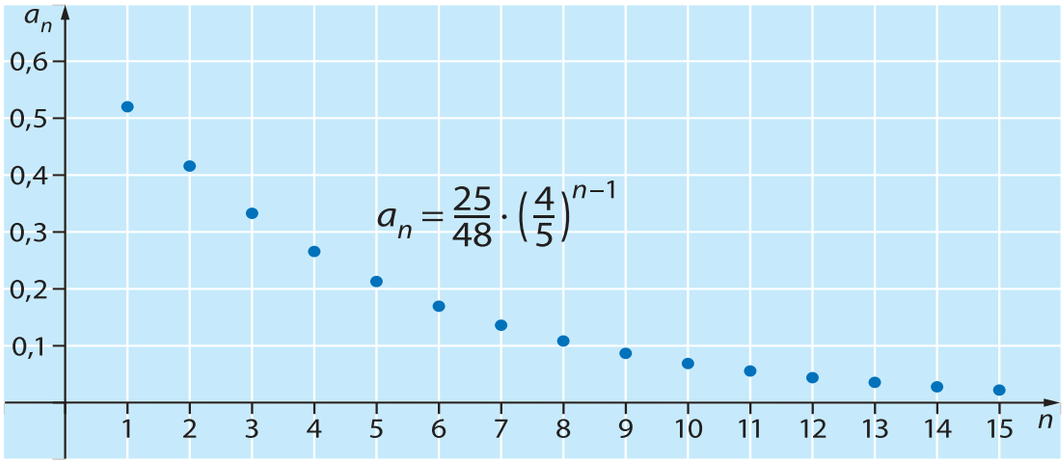
$$\begin{cases} a_3 = \frac{1}{3} \\ a_6 = \frac{64}{375} \end{cases}$$
$$\begin{cases} a_1 \cdot q^2 = \frac{1}{3} \\ a_1 \cdot q^5 = \frac{64}{375} \end{cases}$$

$$q = \frac{4}{5} \quad \text{ja} \quad a_1 = \frac{25}{48}$$

Lukujonon yleinen jäsen on:

$$a_n = \frac{25}{48} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$$

b)



c) $a_{10} = \frac{25}{48} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{10-1} = 0,0699050... \approx 0,070$

d) Kun jonon jäsenet ovat pienempiä kuin 0,0001, nämä toteuttavat ehdon $a_n < 0,0001$.

$$\frac{25}{48} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} < 0,0001$$

$$n > 39,352...$$

Ensimmäinen positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa ehdon on luku 40. Lukujonon 40. jäsenestä alkaen jäsenet ovat siis pienempiä kuin 0,0001.

186.

a) Koska asuntokanta on kasvanut joka vuosi saman verran, lukujono on aritmeettinen, jonka differenssi on $d = 30\,000$.

Lukujonon ensimmäinen jäsen on asuntokanta 1990. Vuoden 2013 asuntokanta on jonon $2013 - 1989 = 24$. jäsen.

Kirjoitetaan jonon 24. jäsen ensimmäisen jäsenen ja differenssin avulla.

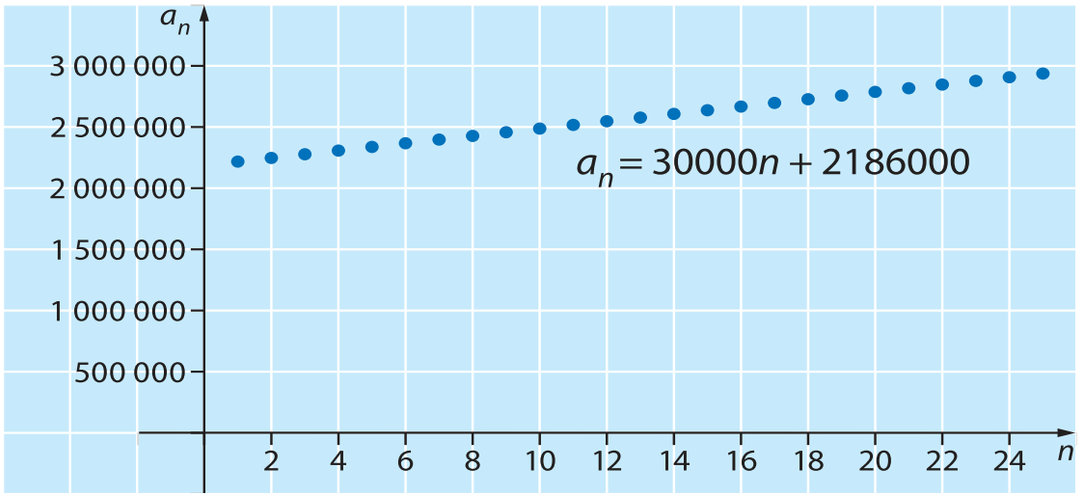
$$a_{24} = a_1 + (24-1) \cdot 30\,000 = a_1 + 690\,000$$

Koska tiedetään vuoden 2013 asuntokanta, muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan a_1.

$$\begin{aligned} a_{24} &= 2\,906\,000 \\ a_1 + 690\,000 &= 2\,906\,000 \\ a_1 &= 2\,216\,000 \end{aligned}$$

b) Muodostetaan lukujonon yleinen jäsen.

$$a_n = 2\,216\,000 \cdot (n-1) \cdot 30\,000 = 30\,000n + 2\,186\,000$$



Tarkasteltava aikaväli on 1990–2013, jossa on 24 jäsentä.

c) Ratkaistaan epäyhtälö $a_n > 3\,200\,000$.

$$30\,000n + 2\,186\,000 > 3\,200\,000$$

$$n > 33{,}8$$

Ensimmäinen positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa ehdon on luku 34. Lasketaan, mikä vuosi tuolloin on.

$$1989 + 34 = 2023$$

187.

a) Koska työttömien määrää pyritään vähentämään vuosittain aina yhtä monta prosenttia, voidaan työttömien määriä kuvata geometrisen jonon avulla.

Työttömien määrä vähenee joka vuosi 6,5 %, joten prosenttikerroin eli jonon suhdeluku on

$100\,\% - 6,5\,\% = 93,5\,\% = 0,935$

Lukujonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 252\,000$

Muodostetaan lukujonon yleinen jäsen.

$a_n = 252\,000 \cdot 0,935^{n-1}$

b) Lasketaan, kuinka mones jonon jäsen 2025 vuoden työttömien määrä on

$2025 - 2014 = 11$

Lasketaan jonon 11. jäsen.

$a_{11} = 252\,000 \cdot 0,935^{11-1} = 128\,681,658... \approx 129\,000$

Vuonna 2025 työttömien määrä on 129 000

c) Puolet vuoden 2015 työttömien määrästä on $\frac{252\,000}{2} = 126\,000$.

Ratkaistaan epäyhtälö $a_n < 126\,000$.

$$252\,000 \cdot 0,935^{n-1} < 126\,000$$
$$n < 11,3133...$$

Ensimmäinen positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa ehdon on luku 12.

Lasketaan, mikä vuosi tuolloin on.

$$2014 + 12 = 2026$$

3.2 Aritmeettinen summa

188.

a) Jonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 2$.

Jonon differenssi on $d = 6 - 2 = 4$.

Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$a_n = 2 + (n-1) \cdot 4 = 2 + 4n - 4 = 4n - 2$

b) $a_{20} = 4 \cdot 20 - 2 = 78$

c) Lasketaan summan arvo summakaavalla.

$$S_{20} = 20 \cdot \frac{2 + 78}{2} = 20 \cdot \frac{80}{2} = 20 \cdot 40 = 800$$

189.

a) Summan laskemiseen tarvitaan

- ensimmäinen yhteenlaskettava a_1
- viimeinen yhteenlaskettava a_{100}
- yhteenlaskettavien määrä 100.

Muodostetaan ensin lukujonon yleinen jäsen.

$$a_n = 3 + (n-1) \cdot 5 = 3 + 5n - 5 = 5n - 2$$

Viimeinen yhteenlaskettava voidaan selvittää yleisen jäsenen avulla.

$$a_{100} = 5 \cdot 100 - 2 = 498$$

Lasketaan summan arvo summakaavalla.

$$S_{100} = 100 \cdot \frac{3 + 498}{2} = 100 \cdot \frac{501}{2} = \frac{50\,100}{2} = 25\,050$$

b) Summan laskemiseen tarvitaan

- ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 1$
- viimeinen yhteenlaskettava $a_n = 797$
- yhteenlaskettavien määrä n.

Yhteenlaskettavien määrä saadaan selville, kun ratkaistaan viimeisen yhteenlaskettavan järjestysnumero.

Muodostetaan ensin lukujonon yleinen jäsen.

$$a_n = 1 + (n-1) \cdot 4 = 1 + 4n - 4 = 4n - 3$$

Muodostetaan yleisen jäsenen avulla yhtälö $a_n = 797$ ja ratkaistaan siitä n.

$$\begin{aligned} 4n - 3 &= 797 \\ 4n &= 800 \qquad \vert : 4 \\ n &= 200 \end{aligned}$$

Lasketaan summan arvo summakaavalla.

$$S_{200} = 200 \cdot \frac{1 + 797}{2} = 200 \cdot 399 = 79\,800$$

190.

a) Summan laskemiseen tarvitaan

- ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 120$
- viimeinen yhteenlaskettava $a_n = 300$
- yhteenlaskettavien määrä n.

Yhteenlaskettavien määrä saadaan selville, kun ratkaistaan viimeisen yhteenlaskettavan järjestysnumero.

Muodostetaan ensin lukujonon yleinen jäsen.

$$a_n = 120 + (n-1) \cdot 20 = 120 + 20n - 20 = 20n + 100$$

Muodostetaan yleisen jäsenen avulla yhtälö $a_n = 300$ ja ratkaistaan siitä n.

$$\begin{aligned} 20n + 100 &= 300 \\ 20n &= 200 \qquad \vert : 20 \\ n &= 10 \end{aligned}$$

Lasketaan summan arvo summakaavalla.

$$S_{10} = 10 \cdot \frac{120 + 300}{2} = 10 \cdot 210 = 2\,100$$

b) Summan laskemiseen tarvitaan

- ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = -2$
- viimeinen yhteenlaskettava $a_n = -236$
- yhteenlaskettavien määrä n.

Yhteenlaskettavien määrä saadaan selville, kun ratkaistaan viimeisen yhteenlaskettavan järjestysnumero.

Muodostetaan ensin lukujonon yleinen jäsen.

$$a_n = -2 + (n-1)\cdot(-6) = -2 - 6n + 6 = -6n + 4$$

Muodostetaan yleisen jäsenen avulla yhtälö $a_n = -236$ ja ratkaistaan siitä n.

$$\begin{aligned} -6n + 4 &= -236 \\ -6n &= -240 \qquad \big| : (-6) \\ n &= 40 \end{aligned}$$

Lasketaan summan arvo summakaavalla.

$$S_{40} = 40 \cdot \frac{-2 + (-236)}{2} = 40 \cdot (-119) = -4760$$

191.

a) Muodostetaan yhtälö summakaavan avulla ja lasketaan siitä n.

$$\begin{aligned} S_n &= 500 \\ n \cdot \frac{6+44}{2} &= 500 \\ n \cdot 25 &= 500 \qquad \vert : 25 \\ n &= 20 \end{aligned}$$

b) Muodostetaan jonon 20. jäsen jonon ensimmäisen jäsenen ja differenssin d avulla.

$$a_{20} = a_1 + (20-1) \cdot d = a_1 + 19d$$

Kun tiedetään jonon 20. jäsenen arvo, muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä d.

$$\begin{aligned} a_{20} &= 44 \\ a_1 + 19d &= 44 \\ 6 + 19d &= 44 \\ 19d &= 38 \qquad \vert : 19 \\ d &= 2 \end{aligned}$$

Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$$a_n = 6 + (n-1) \cdot 2 = 6 + 2n - 2 = 2n + 4$$

192.

a) Jonon ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_1 = 2 \cdot 1 + 5 = 2 + 5 = 7$.

b) Jonon viimeinen yhteenlaskettava on $a_{20} = 2 \cdot 20 + 5 = 40 + 5 = 45$.

c) Summassa on 20 yhteenlaskettavaa.

d) Lasketaan summan arvo summakaavalla.

$$S_{20} = 20 \cdot \frac{7 + 45}{2} = 20 \cdot \frac{52}{2} = 20 \cdot 26 = 520$$

193.

a) Summassa lasketaan yhteen 10 ensimmäistä lukujonon jäsentä. Selvitetään yleisen jäsenen $a_n = 8n - 2$ avulla ensimmäinen ja viimeinen yhteenlaskettava.

- Ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_1 = 8 \cdot 1 - 2 = 6$.
- Viimeinen yhteenlaskettava on $a_{10} = 8 \cdot 10 - 2 = 78$.

Lasketaan summan arvo summakaavalla.

$$S_{10} = 10 \cdot \frac{6 + 78}{2} = 10 \cdot 42 = 420$$

b) Lasketaan yleisen jäsenen $a_n = 2n + 4$ avulla ensimmäinen ja viimeinen yhteenlaskettava.

- Ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_6 = 2 \cdot 6 + 4 = 16$.
- Viimeinen yhteenlaskettava on $a_{35} = 2 \cdot 35 + 4 = 74$.

Summassa on 30 yhteenlaskettavaa.

Lasketaan summan arvo summakaavalla.

$$S_{30} = 30 \cdot \frac{16 + 74}{2} = 30 \cdot 45 = 1\,350$$

194.

a) Lasketaan yleisen jäsenen $a_n = n+1$ avulla ensimmäinen ja viimeinen yhteenlaskettava.

- Ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_2 = 2+1 = 3$.
- Viimeinen yhteenlaskettava on $a_{14} = 14+1 = 15$.

Summassa on 13 yhteenlaskettavaa.

Lasketaan summan arvo summakaavalla.

$$S_{13} = 13 \cdot \frac{3+15}{2} = 13 \cdot 9 = 117$$

b) Lasketaan yleisen jäsenen $a_n = 2-2n$ avulla ensimmäinen ja viimeinen yhteenlaskettava.

- Ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_4 = 2-2 \cdot 4 = -6$.
- Viimeinen yhteenlaskettava on $a_{28} = 2-2 \cdot 28 = 2-56 = -54$.

Summassa on 25 yhteenlaskettavaa.

Lasketaan summan arvo summakaavalla.

$$S_{25} = 25 \cdot \frac{-6+(-54)}{2} = 25 \cdot (-30) = -750$$

195.

a) Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$a_n = 45 + (n-1) \cdot 47 = 45 + 47n - 47 = 47n - 2$

b) Summassa lasketaan jonon 500 ensimmäisen luvun summa.

Ensimmäinen jäsen on annettu $a_1 = 45$, ratkaistaan viimeinen yhteenlaskettava jonon yleisen jäsenen avulla.

$a_{500} = 47 \cdot 500 - 2 = 23\,498$

Lasketaan summan arvo summakaavalla.

$$S_{500} = 500 \cdot \frac{45 + 23\,498}{2} = 5\,885\,750$$

c) Lasketaan yleisen jäsenen $a_n = 47n - 2$ avulla ensimmäinen ja viimeinen yhteenlaskettava.

- Ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_{25} = 47 \cdot 25 - 2 = 1173$
- Viimeinen yhteenlaskettava on $a_{71} = 47 \cdot 71 - 2 = 3335$

Summassa on 47 yhteenlaskettavaa.

Lasketaan summan arvo summakaavalla.

$$S_{47} = 47 \cdot \frac{1173 + 3\,335}{2} = 105\,938$$

d) Lasketaan yleisen jäsenen $a_n = 47n - 2$ avulla ensimmäinen ja viimeinen yhteenlaskettava.

- Ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_{12} = 47 \cdot 12 - 2 = 562$.
- Viimeinen yhteenlaskettava on $a_{103} = 47 \cdot 103 - 2 = 4839$.

Summassa on 92 yhteenlaskettavaa.

Lasketaan summan arvo summakaavalla.

$$S_{92} = 92 \cdot \frac{562 + 4839}{2} = 248\,446$$

196.

Muodostetaan jonon kolmas ja yhdeksäs jäsen jonon ensimmäisen jäsenen ja differenssin avulla.

$$a_3 = a_1 + (3-1)\cdot d = a_1 + 2d$$
$$a_9 = a_1 + (9-1)\cdot d = a_1 + 8d$$

Kun tiedetään $a_3 = 15$ ja $a_9 = 69$, muodostetaan yhtälöpari ja ratkaistaan siitä jonon ensimmäinen jäsen ja differenssi.

$$\begin{cases} a_3 = 15 \\ a_9 = 69 \end{cases}$$
$$\begin{cases} a_1 + 2d = 15 \\ a_1 + 8d = 69 \end{cases}$$

$a_1 = -3$ ja $d = 9$

Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$$a_n = -3 + (n-1)\cdot 9 = 9n - 12$$

Lasketaan jonon yleisen jäsenen avulla viimeisen yhteenlaskettavan arvo.

$$a_{450} = 9\cdot 450 - 12 = 4038$$

Lasketaan summan arvo summakaavalla.

$$S_{450} = 450\cdot\frac{-3+4038}{2} = 907\,875$$

197.

a) Muodostetaan ensin jonon yleinen jäsen.

- Jonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 5$.
- Differenssi on $d = 12 - 5 = 7$.

Yleinen jäsen $a_n = 5 + (n-1) \cdot 7 = 7n - 2$.

Muodostetaan lauseke summalle, kun lasketaan yhteen *n* kappaletta jonon jäseniä.

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} = n \cdot \frac{5 + (7n - 2)}{2} = \frac{n(7n + 3)}{2}$$

Ratkaistaan epäyhtälön avulla, milloin summa ylittää arvon 200 000.

$$S_n > 200\,000$$

$$\frac{n(7n + 3)}{2} > 200\,000$$

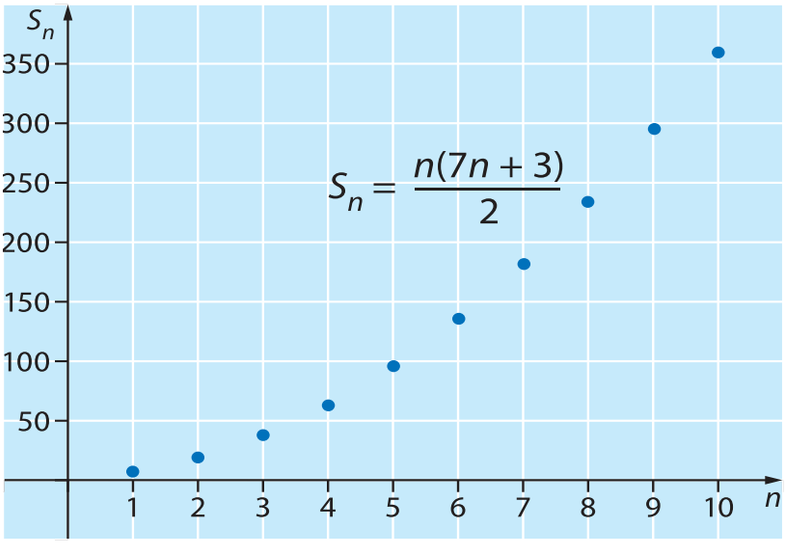
$$n < -239,26... \text{ tai } n > 238,83...$$

Järjestysnumero *n* on positiivinen kokonaisluku.

Pienin positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa epäyhtälö, on 239.

b) Summista muodostuvan lukujonon yleinen jäsen on $S_n = \frac{n(7n+3)}{2}$.

Piirretään kuvaaja tämän lukujonon kymmenestä ensimmäisestä jäsenestä.



198.

a) Muodostetaan ensin jonon yleinen jäsen.

- Jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = -32$
- Differenssi $d = -14 - (-32) = 18$

Yleinen jäsen $a_n = -32 + (n-1) \cdot 18 = 18n - 50$.

Muodostetaan lauseke summalle, kun lasketaan yhteen *n* kappaletta jonon jäseniä.

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} = n \cdot \frac{-32 + (18n - 50)}{2} = \frac{n(18n - 82)}{2} = n(9n - 41) = 9n^2 - 41n$$

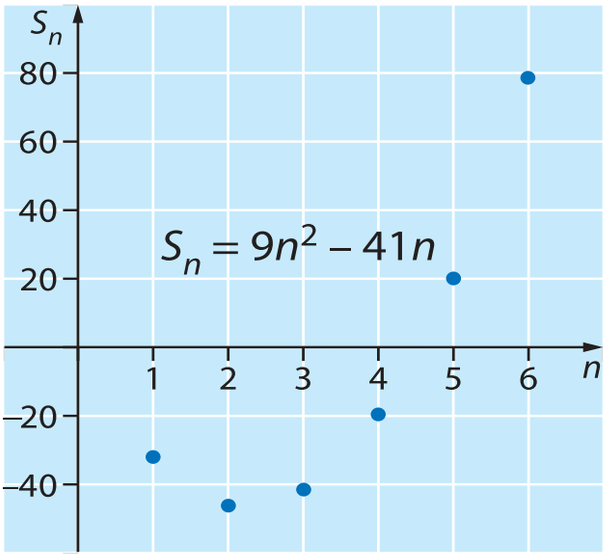
Ratkaistaan epäyhtälön avulla, milloin summa arvon on alle 300 000.

$$S_n < 300\,000$$
$$9n^2 - 41n < 300\,000$$
$$n > -180,31... \text{ tai } n < 184,86...$$

Järjestysnumero *n* on positiivinen kokonaisluku. Suurin positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa epäyhtälö, on 184.

b) Summista muodostuvan lukujonon yleinen jäsen on $S_n = 9n^2 - 41n$.

Piirretään kuvaaja tämän lukujonon kuudesta ensimmäisestä jäsenestä.



199.

a) Muodostetaan jonon viides jäsen jonon ensimmäisen jäsenen ja differenssin avulla.

$$a_5 = \frac{3}{4} + (5-1) \cdot d = \frac{3}{4} + 4d$$

Kun tiedetään jonon 5. jäsenen arvo, muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan d.

$$a_5 = \frac{41}{12}$$

$$\frac{3}{4} + 4d = \frac{41}{12}$$

$$d = \frac{2}{3}$$

Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$$a_n = \frac{3}{4} + (n-1) \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}n + \frac{1}{12}$$

Muodostetaan lauseke summalle, kun lasketaan yhteen n kappaletta jonon jäseniä.

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} = n \cdot \frac{\frac{3}{4} + \left(\frac{2}{3}n + \frac{1}{12}\right)}{2} = \frac{4n^2 + 5n}{12}$$

Ratkaistaan epäyhtälön avulla, milloin summa arvon on alle 700.

$$S_n < 700$$

$$\frac{4n^2 + 5n}{12} < 700$$

$$n > -46,45... \text{ tai } n < 45,20...$$

Järjestysnumero n on positiivinen kokonaisluku. Suurin positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa epäyhtälö, on 45.

b) Viimeinen yhteenlaskettava on

$$a_{45} = \frac{2}{3} \cdot 45 + \frac{1}{12} = \frac{361}{12}$$

200.

Muodostetaan yhtälö kolmen ensimmäisen luvun summa summakaavalla ja ratkaistaan siitä jonon kolmas jäsen a_3.

$$\begin{aligned} S_3 &= 906 \\ n \cdot \frac{a_1 + a_3}{2} &= 906 \\ 3 \cdot \frac{240 + a_3}{2} &= 906 \\ a_3 &= 364 \end{aligned}$$

Muodostetaan jonon kolmas jäsen jonon ensimmäisen jäsenen ja differenssin avulla.

$$a_5 = 240 + (3-1) \cdot d = 240 + 2d$$

Kun tiedetään jonon 3. jäsenen arvo, muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan *d*.

$$\begin{aligned} a_3 &= 364 \\ 240 + 2d &= 364 \\ d &= 62 \end{aligned}$$

Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$$a_n = 240 + (n-1) \cdot 62 = 62n + 178$$

Muodostetaan lauseke summalle, kun lasketaan yhteen *n* kappaletta jonon jäseniä.

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} = n \cdot \frac{240 + (62n + 178)}{2} = 31n^2 + 209n$$

Ratkaistaan epäyhtälön avulla, milloin summa ylittää arvon 15 000.

$$S_n > 15\,000$$

$$31n^2 + 209n > 15\,000$$

$$n < -25,624... \text{ tai } n > 18,882...$$

Järjestysnumero n on positiivinen kokonaisluku. Pienin positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa epäyhtälö, on 19.

201.

a) Kukan taimien määrät eri riveillä muodostavat aritmeettisen jonon.

- Jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 1$
- Jonon differenssi $d = 2$
- Jonon yleinen jäsen $a_n = 1 + (n-1) \cdot 2 = 2n - 1$

Kun lasketaan yhteen riveillä olevat taimet, summa voi korkeintaan olla 430. Muodostetaan yhtälö $S_n = 430$ ja ratkaistaan siitä n.

$$n \cdot \frac{1 + (2n-1)}{2} = 430$$

$$n = -20,73... \text{ tai } n = 20,73...$$

Rivien määrä on positiivinen kokonaisluku.

- Jos $n = 20$, $S_{20} = 20 \cdot \frac{1 + (2 \cdot 20 - 1)}{2} = 400$.
- Jos $n = 21$, $S_{21} = 21 \cdot \frac{1 + (2 \cdot 21 - 1)}{2} = 441 > 430$.

Kukantaimet riittävät 20 riviin.

b) 20 rivissä on 400 kukantainta, joten $430 - 400 = 30$ tainta jää käyttämättä.

202.

Amandan säästöön laitetut rahamäärät eri kuukausina muodostavat aritmeettisen jonon.

- Jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 10$
- Jonon differenssi $d = 15 - 10 = 5$
- Jonon yleinen jäsen $a_n = 10 + (n-1) \cdot 5 = 5n + 5$

Kun lasketaan yhteen säästöön laitetut rahamäärät, summa on vähintään 640.

Muodostetaan epäyhtälö $S_n > 640$ ja ratkaistaan siitä n.

$$n \cdot \frac{10 + (5n + 5)}{2} > 640$$

$$n < -17,57... \text{ tai } n > 14,57...$$

Järjestysnumero n on positiivinen kokonaisluku. Pienin positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa epäyhtälö, on 15.

b) 15 kuukaudessa Amanda säästää $S_{15} = 15 \cdot \frac{10 + (5 \cdot 15 + 5)}{2} = 675$ (€),

joten säästöistä jää käyttämättä $675\ € - 640\ € = 35\ €$.

203.

a) Lääkeannoksen määrät eri päivinä muodostavat aritmeettisen jonon.

- Jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 145$
- Jonon differenssi $d = -5$
- Jonon yleinen jäsen $a_n = 145 + (n-1)\cdot(-5) = -5n + 150$

Lääkekuurin viimeinen annos on 5 mg, eli jonon jäsenen n arvo on 5.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan n.

$$\begin{aligned} a_n &= 5 \\ -5n + 150 &= 5 \\ n &= 29 \end{aligned}$$

Lääkekuuri kestää 29 päivää.

b) Lasketaan summakaavalla, kuinka paljon Eemeli syö kuurin aikana lääkettä.

$$S_{29} = 29 \cdot \frac{145 + 5}{2} = 2\,175 \text{ mg}$$

204.

a) Topiaksen pyöräilymatkat eri viikoilla muodostavat aritmeettisen jonon.

- Jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 65$
- Jonon differenssi $d = 5,0$
- Jonon yleinen jäsen $a_n = 65 + (n-1) \cdot 5 = 5n + 60$

Kun lasketaan yhteen viikkojen pyöräilymatkat, summa pitää olla vähintään 1157.

Muodostetaan epäyhtälö $S_n > 1157$ ja ratkaistaan siitä n.

$$n \cdot \frac{65 + (5n + 60)}{2} > 1157$$

$$n < -37,38... \text{ tai } n > 12,80...$$

Järjestysnumero n on positiivinen kokonaisluku. Pienin positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa epäyhtälö, on 13.

Topias pyöräili 13 viikkoa.

b) Lasketaan summa 12. ensimmäisestä jonon jäsenestä.

$$S_{12} = 12 \cdot \frac{65 + (5 \cdot 12 + 60)}{2} = 1110$$

Viimeisellä viikolla Topias pyöräilee $1157 \text{ km} - 1110 \text{ km} = 47 \text{ km}$.

205.

a) Summan laskemiseen tarvitaan

- ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = \frac{1}{2}$
- viimeinen yhteenlaskettava $a_n = 6$
- yhteenlaskettavien määrä n.

Yhteenlaskettavien määrä saadaan selville, kun ratkaistaan viimeisen yhteenlaskettavan järjestysnumero.

Muodostetaan ensin lukujonon yleinen jäsen.

$$a_n = \frac{1}{2} + (n-1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}n$$

Muodostetaan yleisen jäsenen avulla yhtälö $a_n = 6$ ja ratkaistaan siitä n.

$$\frac{1}{2}n = 6 \qquad \left| \cdot 2 \right.$$
$$n = 12$$

Lasketaan summan arvo summakaavalla.

$$S_{12} = 12 \cdot \frac{\frac{1}{2} + 6}{2} = \frac{6 + 72}{2} = 39$$

b) Lasketaan yleisen jäsenen $a_n = 2n + 3$ avulla ensimmäinen ja viimeinen yhteenlaskettava.

- Ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_4 = 2 \cdot 4 + 3 = 11$.
- Viimeinen yhteenlaskettava on $a_{13} = 2 \cdot 13 + 3 = 29$.

Summassa on 10 yhteenlaskettavaa.

Lasketaan summan arvo summakaavalla.

$$S_{10} = 10 \cdot \frac{11 + 29}{2} = 10 \cdot 20 = 200$$

206.

a) Summan laskemiseen tarvitaan

- ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 42$
- viimeinen yhteenlaskettava a_{100}
- yhteenlaskettavien määrä 100.

Muodostetaan ensin lukujonon yleinen jäsen.

$$a_n = 42 + (n-1)\cdot(-4) = 42 - 4n + 4 = -4n + 46$$

Viimeinen yhteenlaskettava voidaan selvittää yleisen jäsenen avulla.

$$a_{100} = -4 \cdot 100 + 46 = -354$$

Lasketaan summan arvo summakaavalla.

$$S_{100} = 100 \cdot \frac{42 + (-354)}{2} = 100 \cdot \frac{-312}{2} = \frac{-31\,200}{2} = -15\,600$$

b) Lasketaan kuinka monen jäsenen arvo on enemmän kuin 0.

Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan siitä n.

$$\begin{aligned} a_n &> 0 \\ -4n + 46 &> 0 \\ -4n &> -46 \qquad \big| : (-4) \\ n &< \frac{46}{4} = 11\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ensimmäinen kokonaisluku, joka toteuttaa ehdon on 11.

Lasketaan 11 ensimmäisen jäsenen summa summakaavalla.

$$S_{12} = 11 \cdot \frac{42 + (-4 \cdot 11 + 46)}{2} = 11 \cdot \frac{44}{2} = 11 \cdot 22 = 242$$

207.

a) Jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 20 \cdot 1 - 15 = 5$.

Muodostetaan lauseke summalle, kun lasketaan yhteen *n* kappaletta jonon jäseniä.

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} = n \cdot \frac{5 + (20n - 15)}{2} = 10n^2 - 5n$$

Ratkaistaan epäyhtälön avulla, milloin summa ylittä arvon 100 000.

$$S_n > 100\,000$$
$$10n^2 - 5n > 100\,000$$
$$n < -99,750... \text{ tai } n > 100,250...$$

Järjestysnumero *n* on positiivinen kokonaisluku.

Pienin positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa epäyhtälö, on 101.

b) Viimeinen yhteenlaskettava on

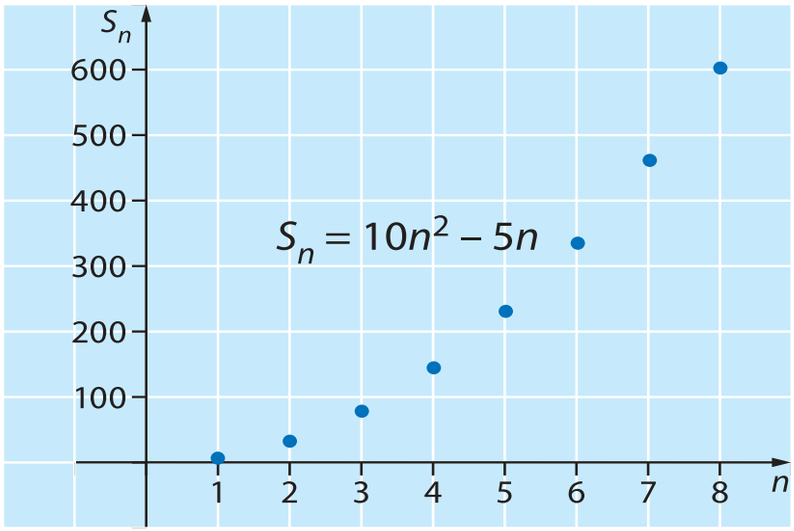
$a_{101} = 20 \cdot 101 - 15 = 2005$.

c) Lauseke summalle, kun lasketaan yhteen *n* kappaletta jonon jäseniä

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} = n \cdot \frac{5 + (20n - 15)}{2} = 10n^2 - 5n$$

d) Summista muodostuvan lukujonon yleinen jäsen on $S_n = 10n^2 - 5n$.

Piirretään kuvaaja tämän lukujonon kahdeksasta ensimmäisestä jäsenestä.



208.

a) Kaarlon luetut sivut eri päivinä muodostavat aritmeettisen jonon.

- Jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 15$
- Jonon differenssi $d = 4$
- Jonon yleinen jäsen $a_n = 15 + (n-1) \cdot 4 = 4n + 11$

Kun lasketaan yhteen Kaarlon lukemat sivut, summa on vähintään 452.

Muodostetaan epäyhtälö $S_n > 452$ ja ratkaistaan siitä n.

$$n \cdot \frac{15 + (4n + 11)}{2} > 452$$

$$n < -18,63... \text{ tai } n > 12,13...$$

Järjestysnumero n on positiivinen kokonaisluku. Pienin positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa epäyhtälö, on 13. Kaarlo on lukenut kirjan 13 päivän kuluttua.

b) 12 päivässä Kaarlo on lukenut

$$S_{12} = 12 \cdot \frac{15 + (4 \cdot 12 + 11)}{2} = 444$$

Joten viimeisenä päivänä Kaarlo luki $452 - 444 = 8$ sivua.

209.

Tikapuiden askelmien leveydet muodostavat aritmeettisen jonon.

Muodostetaan jonon viides ja yhdeksäs jäsen jonon ensimmäisen jäsenen ja differenssi avulla.

$$a_5 = a_1 + (5-1)\cdot d = a_1 + 4d$$
$$a_9 = a_1 + (9-1)\cdot d = a_1 + 8d$$

Kun tiedetään jonon viidennen ja yhdeksännen jäsenen arvot, muodostetaan yhtälöpari ja ratkaistaan siitä a_1 ja d.

$$\begin{cases} a_5 = a_1 + 4d \\ a_9 = a_1 + 8d \end{cases}$$
$$\begin{cases} a_1 + 4d = 53 \\ a_1 + 8d = 41 \end{cases}$$

$a_1 = 65$ ja $d = -3$

Jonon yleinen jäsen on $a_n = 65 + (n-1)\cdot(-3) = -3n + 68$

Kun lasketaan yhteen askelmien leveydet, summa on 611.

Muodostetaan yhtälö $S_n = 611$ ja ratkaistaan siitä n.

$$n \cdot \frac{65 + (-3n + 68)}{2} = 611$$

$$n = 31{,}333\ldots \text{ tai } n = 13$$

Koska vastaukseksi kelpaa vain positiivinen kokonaisluku, joten tikapuissa on 13 askelmaa.

3.3 Geometrinen summa

210.

a) $a_{10} = 3 \cdot 2^{10-1} = 1\,536$

b) Summan laskemiseen tarvitaan

- ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 3 \cdot 2^{1-1} = 3$
- suhdeluku $q = 2$
- yhteenlaskettavien määrä $n = 10$

Lasketaan summan arvo summakaavalla.

$$S_{10} = 3 \cdot \frac{1-2^{10}}{1-2} = 3\,069$$

211.

a) Summan laskemiseen tarvitaan

- ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = -2$
- suhdeluku $q = \frac{8}{-2} = -4$
- yhteenlaskettavien määrä $n = 12$

Lasketaan summan arvo summakaavalla.

$$S_{12} = -2 \cdot \frac{1-(-4)^{12}}{1-(-4)} = 6\,710\,886 \approx 6,71 \cdot 10^6$$

b) Lasketaan summa summakaavalla. Summan laskemiseen tarvitaan

- ensimmäinen yhteenlaskettava $a_6 = 7 \cdot 3^{6-1} = 1\,701$
- suhdeluku $q = 3$
- yhteenlaskettavien määrä $n = 15 - 5 = 10$.

Lasketaan summan arvo.

$$S_{10} = 1\,701 \cdot \frac{1-3^{10}}{1-3} = 50\,220\,324 \approx 5,02 \cdot 10^7$$

212.

a) Summan laskemiseen tarvitaan

- ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = \frac{2}{3}$
- suhdeluku $q = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}} = 2$
- yhteenlaskettavien määrä $n = 10$.

Lasketaan summan arvo summakaavalla.

$$S_{10} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1-2^{10}}{1-2} = 682$$

b) Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$$a_n = \frac{2}{3} \cdot 2^{n-1}$$

Summan laskemiseen tarvitaan

- ensimmäinen yhteenlaskettava $a_5 = \frac{2}{3} \cdot 2^{5-1} = \frac{32}{3}$
- suhdeluku $q = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}} = 2$
- yhteenlaskettavien määrä $n = 14 - 4 = 10$.

Lasketaan summan arvo summakaavalla.

$$S_{10} = \frac{32}{3} \cdot \frac{1 - 2^{10}}{1 - 2} = 10\,912$$

213.

Summan laskemiseen tarvitaan

- ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = -5$
- suhdeluku q
- yhteenlaskettavien määrä $n = 13$.

Ratkaistaan jonon 13. jäsenen avulla suhdeluku.

Muodostetaan ensin geometrisen jonon yleinen jäsen.

$$a_n = -5 \cdot q^{n-1}$$

Muodostetaan yleisen jäsenen avulla yhtälö ja ratkaistaan q.

$$\begin{aligned} a_{13} &= -20\,480 \\ -5 \cdot q^{13-1} &= -20\,480 \\ q &= 2 \text{ tai } q = -2 \end{aligned}$$

Kahdelle erilaiselle geometriselle jonolle $a_{13} = -20\,480$.

Lasketaan kummassakin tapauksessa summan arvo.

$q = 2$	$q = -2$
$S_{13} = -5 \cdot \dfrac{1-2^{13}}{1-2} = -40\,955$	$S_{13} = -5 \cdot \dfrac{1-(-2)^{13}}{1-(-2)} = -13\,655$

214.

a) Summan laskemiseen tarvitaan

- ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = -2$
- suhdeluku $q = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$
- yhteenlaskettavien määrä n

Muodostetaan geometrisen jonon yleinen jäsen.

$$a_n = -2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

Muodostetaan yleisen jäsenen avulla yhtälö ja ratkaistaan n.

$$a_n = -\frac{19\,683}{256}$$

$$-2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} = -\frac{19\,683}{256}$$

$$n = 10$$

b) $S_{10} = -2 \cdot \frac{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{10}}{1 - \frac{3}{2}} = -\frac{58\,025}{256}$

215.

a) Summan laskemiseen tarvitaan

- ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 8$
- suhdeluku $q = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$
- yhteenlaskettavien määrä n

Muodostetaan geometrisen jonon yleinen jäsen.

$$a_n = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Muodostetaan yleisen jäsenen avulla yhtälö ja ratkaistaan n.

$$a_n = -\frac{1}{128}$$

$$8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\frac{1}{128}$$

$$n = 11$$

Lasketaan summa summakaavan avulla.

$$S_{11} = 8 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{11}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2\,047}{128}$$

b) Summan laskemiseen tarvitaan

- ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = -7$
- suhdeluku $q = \frac{-21}{-7} = 3$
- yhteenlaskettavien määrä n

Muodostetaan geometrisen jonon yleinen jäsen.

$$a_n = -7 \cdot 3^{n-1}$$

Muodostetaan yleisen jäsenen avulla yhtälö ja ratkaistaan n.

$$\begin{aligned} a_n &= -5103 \\ -7 \cdot 3^{n-1} &= -5103 \\ n &= 7 \end{aligned}$$

Lasketaan summa summakaavan avulla.

$$S_7 = -7 \cdot \frac{1-3^7}{1-3} = -7651$$

216.

a) Summan laskemiseen tarvitaan

- ensimmäinen yhteenlaskettava a_1
- suhdeluku $q = 2$
- yhteenlaskettavien määrä $n = 10$.

Ratkaistaan jonon ensimmäinen jäsen summakaavan avulla.

$$S_{10} = 5\,115$$

$$a_1 \cdot \frac{1-2^{10}}{1-2} = 5\,115$$

$$a_1 = 5$$

b) Jonon yleinen jäsen on $a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$.

Viimeinen yhteenlaskettava on

$$a_{10} = 5 \cdot 2^{10-1} = 2\,560$$

217.

a) Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$$a_n = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Lasketaan, kuinka monta jäsentä jonossa on.

$$a_n = \frac{3}{8192}$$

$$6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{3}{8192}$$

$$n = 15$$

Parittomien summassa yhteenlaskettavia on $n = \underbrace{1,3,5,7,9,11,13,15}_{8 \text{ kpl}}$.

Parillisen summassa yhteenlaskettavia on $n = \underbrace{2,4,6,8,10,12,14}_{7 \text{ kpl}}$.

Parittomien summassa yhteenlaskettavia on enemmän.

b) Parittomien jäsenet saadaan yhtälöstä $x = 2n - 1$, kun $n = 1, 2, ..., 8$.

Lasketaan parittomien jäsenten summa.

Summan laskemiseen tarvitaan

- ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 6$
- suhdeluku $q = \frac{1}{2}$
- yhteenlaskettavien määrä $n = 8$

$$S_8 = 6 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}}{1 - \frac{1}{2}} = 6 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2 \cdot 8 - 1 - 1}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{49\,149}{4\,096}$$

Parilliset jäsenet saadaan yhtälöstä $y = 2n$, kun $n = 1, 2, ..., 7$.

Lasketaan parillisten jäsenten summa. Summan laskemiseen tarvitaan

- ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 3$
- suhdeluku $q = \frac{1}{2}$
- yhteenlaskettavien määrä $n = 7$

$$S_7 = 3 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{y-1}}{1 - \frac{1}{2}} = 3 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2 \cdot 7 - 1}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{24\,573}{4\,096}$$

Parittomien jäsenien summan arvo on suurempi.

218.

a) Summan laskemiseen tarvitaan

- jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 2$
- suhdeluku $q = \frac{10}{2} = 5$
- yhteenlaskettavien määrä n .

Muodostetaan lauseke summalle, kun lasketaan yhteen *n* kappaletta jonon jäseniä.

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = 2 \cdot \frac{1-5^n}{1-5} = \frac{5^n - 1}{2}$$

Ratkaistaan epäyhtälö $S_n > 10^{12}$.

$$\frac{5^n - 1}{2} > 10^{12}$$

$$n > 17,598...$$

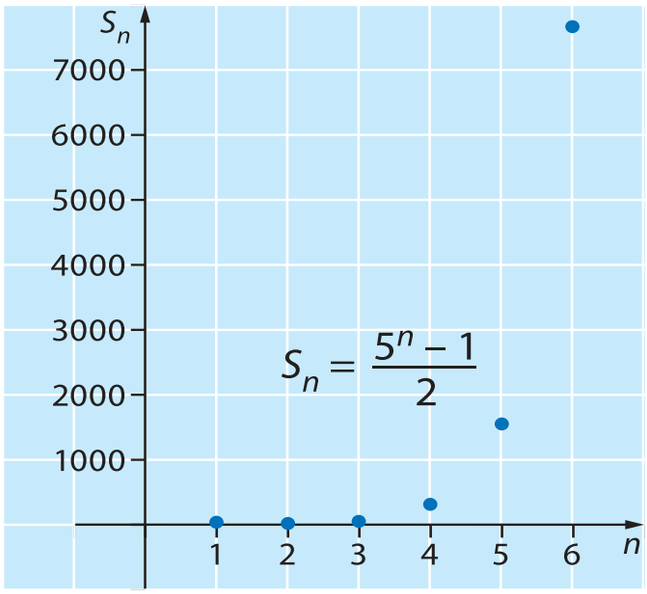
Järjestysnumero *n* on positiivinen kokonaisluku.

Pienin positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa epäyhtälön, on 18.

Tarvitaan siis vähintään 18 jäsentä.

b) Summista muodostuvan lukujonon yleinen jäsen on $S_n = \frac{5^n - 1}{2}$.

Piirretään kuvaaja tämän lukujonon kuudesta ensimmäisestä jäsenestä.



219.

a) Summan laskemiseen tarvitaan

- jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 80$
- suhdeluku $q = \frac{64}{80} = \frac{4}{5}$
- yhteenlaskettavien määrä n .

Muodostetaan lauseke summalle, kun lasketaan yhteen *n* kappaletta jonon jäseniä.

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = 80 \cdot \frac{1-\left(\frac{4}{5}\right)^n}{1-\frac{4}{5}} = 400 \cdot \left(1-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right)$$

Ratkaistaan epäyhtälö $S_n < 350$.

$$400\left(1-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right) < 350$$

$$n < 9,318...$$

Järjestysnumero *n* on positiivinen kokonaisluku.

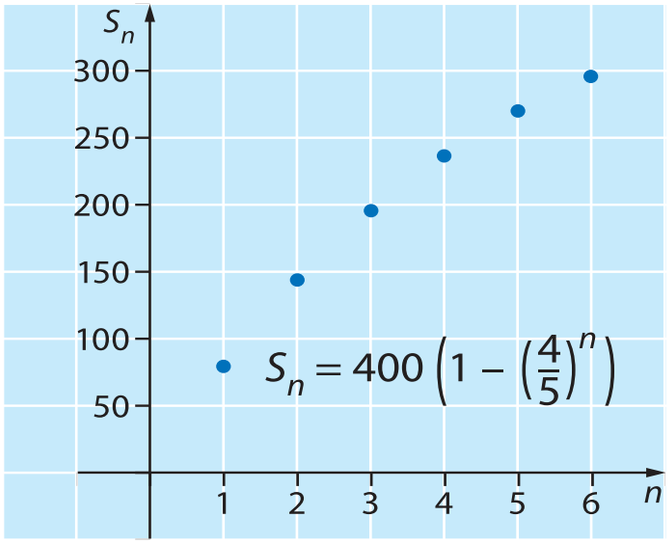
Suurin positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa epäyhtälön, on 9.

Summassa voi korkeintaan olla 9 jäsentä.

b) Summista muodostuvan lukujonon yleinen jäsen on

$$S_n = 400 \cdot \left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n\right).$$

Piirretään kuvaaja tämän lukujonon kuudesta ensimmäisestä jäsenestä.



220.

a) Muodostetaan kuuden ensimmäisen jäsenen summa ja ratkaistaan siitä jonon ensimmäinen jäsen.

$$S_6 = \frac{14\,896}{625}$$

$$a_1 \cdot \frac{1-\left(\frac{3}{5}\right)^6}{1-\frac{3}{5}} = \frac{14\,896}{625}$$

$$a_1 = 10$$

b) Summan laskemiseen tarvitaan

- jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 10$
- suhdeluku $q = \frac{3}{5}$
- yhteenlaskettavien määrä n .

Muodostetaan lauseke summalle, kun lasketaan yhteen *n* kappaletta jonon jäseniä.

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = 10 \cdot \frac{1-\left(\frac{3}{5}\right)^n}{1-\frac{3}{5}} = 25 \cdot \left(1-\left(\frac{3}{5}\right)^n\right)$$

Ratkaistaan epäyhtälö $S_n < 20$.

$$25\left(1-\left(\frac{3}{5}\right)^n\right) < 20$$

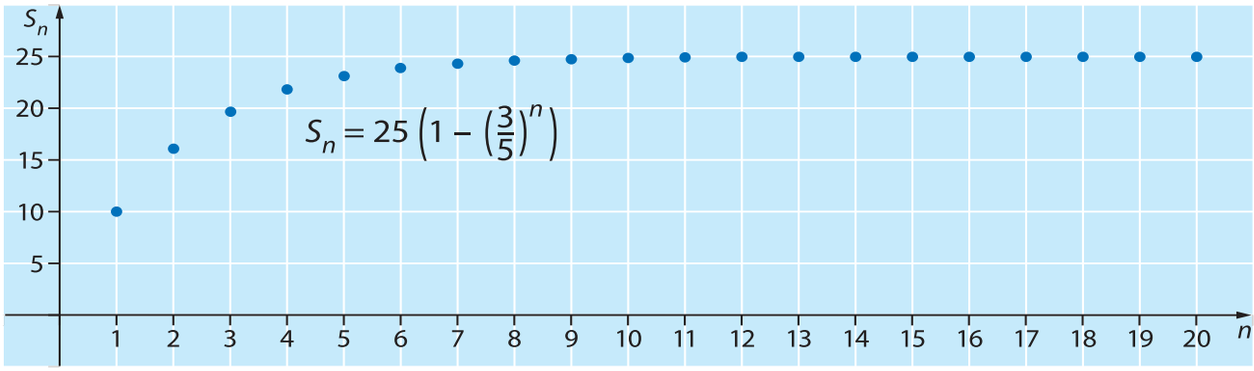
$$n < 3{,}150...$$

Järjestysnumero *n* on positiivinen kokonaisluku.

Suurin positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa epäyhtälön, on 3.

Summassa voi korkeintaan olla 3 jäsentä.

c)



Summan arvot lähestyvät lukua 25.

221.

a) Eri päivien kutomisajat muodostavat geometrisen jonon.

- Jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 20$
- Jonon suhdeluku $q = 1{,}1$

Kahdessa viikossa on 14 päivää. Kahden viikon kutomisajan saadaan, kun lasketaan geometrisen jonon neljäntoista ensimmäisen jäsenen summa.

$$S_{14} = 20 \cdot \frac{1-1{,}1^{14}}{1-1{,}1} = 559{,}499... \approx 559{,}5 \text{ min} = 9 \text{ h } 19 \text{ min}$$

b) Jonon neljäntoista ensimmäisen jäsenen summan tulisi olla $18 \text{ h} = 1\,080 \text{ (min)}$.

Ensimmäisen päivän kutomisaika on a_1.

Muodostetaan summan avulla yhtälö ja ratkaistaan siitä a_1.

$$S_{14} = 1080$$

$$a_1 \cdot \frac{1-1{,}1^{14}}{1-1{,}1} = 1080$$

$$a_1 = 38{,}6059...$$

$$a_1 \approx 39 \text{ min}$$

222.

a)

Talletuskerta	Tilillä rahaa talletuksen tekemisen jälkeen (€)
1.	850
2.	$850 \cdot 1,019 + 850$
3.	$850 \cdot 1,019^2 + 850 \cdot 1,019 + 850$

b) Lasketaan jonon kymmenen ensimmäisen jäsenen summa summakaavan avulla.

$$S_{10} = 850 \cdot \frac{1-1,019^{10}}{1-1,019} = 9\,264,824... \approx 9\,264,82\ €$$

c) Ratkaistaan epäyhtälö $S_n > 13\,000$.

$$850 \cdot \frac{1-1,019^n}{1-1,019} > 13\,000$$

$$n > 13,553...$$

Järjestysnumero n on positiivinen kokonaisluku. Pienin positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa epäyhtälön, on 14.

223.

a) Eri viikkojen opiskeluajat muodostavat geometrisen jonon.

- Jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 1,5\,\text{h} = 90\ (\text{min})$
- Jonon suhdeluku $q = 1,05$

Kahdentoista viikon opiskeluaika saadaan, kun lasketaan geometrisen jonon kahdentoista ensimmäisen jäsenen summa.

$$S_{12} = 90 \cdot \frac{1-1,05^{12}}{1-1,05} = 1\,432,541\ldots\ \text{min} \approx 23\ \text{h}\ 53\ \text{min}$$

b) Eri päivien opiskeluajat muodostavat geometrisen jonon.

- Jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 15$
- Jonon suhdeluku $q = 1,03$

Kahdessatoista viikossa on 84 päivää. Kahdentoista viikon opiskeluaika saadaan, kun lasketaan geometrisen jonon 84. ensimmäisen jäsenen summa.

$$S_{84} = 15 \cdot \frac{1-1,03^{84}}{1-1,03} = 5\,488,208\,\text{min} = 91\ \text{h}\ 28\ \text{min}$$

Anna on opiskellut enemmän.

224.

a) Suomen kasvihuonepäästöjen määrä eri vuosina (vuodesta 2006) muodostavat geometrisen jonon.

- Jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 80$ (milj. tonnia)
- Suhdeluku $q = 0,975$

Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$a_n = 80 \cdot 0,975^{n-1}$

Ratkaistaan epäyhtälö $a_n < 71$.

$80 \cdot 0,975^{n-1} < 71$

$n > 5,713...$

Järjestysnumero *n* on positiivinen kokonaisluku. Pienin positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa epäyhtälön, on 6.

Lasketaan mikä vuosi tuolloin on.

$2005 + 6 = 2011$

b) Lasketaan, kuinka paljon Suomen kasvihuonepäästöjen määrät olivat yhteensä summakaavan avulla.

$$S_6 = 80 \cdot \frac{1 - 0,975^6}{1 - 0,975} = 450,9814... \text{ (milj. tonnia)}$$

Jos Suomi ei olisi vähentänyt kasvihuonepäästöjen määrää, ne olisivat olleet $80 \cdot 6 = 480$ milj. tonnia.

Suomi siis on vähentänyt kasvihuonepäästöjen määrää kuudessa vuodessa $480 - 450,9814... = 29,0185... \approx 29$ miljoonaa tonnia hiilidioksidiekvivalenttia.

225.

a) Summan laskemiseen tarvitaan

- ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 3$
- suhdeluku $q = \frac{3}{6} = 2$
- yhteenlaskettavien määrä n

Muodostetaan geometrisen jonon yleinen jäsen.

$$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$$

Muodostetaan yleisen jäsenen avulla yhtälö ja ratkaistaan n.

$$\begin{aligned} a_n &= 3072 \\ 3 \cdot 2^{n-1} &= 3072 \\ n &= 11 \end{aligned}$$

Lasketaan summa summakaavan avulla.

$$S_{11} = 3 \cdot \frac{1-2^{11}}{1-2} = 6141$$

226.

Muodostetaan geometrisen jonon 9. jäsen jonon ensimmäisen jäsenen ja suhdeluvun avulla.

$$a_9 = \frac{3}{5} \cdot q^{9-1} = \frac{3}{5} \cdot q^8$$

Kun tiedetään jonon 9. jäsenen arvo, muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan suhdeluku q.

$$a_9 = \frac{3}{327\,680}$$

$$\frac{3}{5} \cdot q^8 = \frac{3}{327\,680}$$

$$q = \frac{1}{4} \quad \text{tai} \quad q = -\frac{1}{4}$$

Kahdelle erilaiselle geometriselle jonolle on $a_9 = \frac{3}{327\,680}$.

Lasketaan kummassakin tapauksessa summan arvo.

$q = \frac{1}{4}$

$$S_9 = \frac{3}{5} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^9}{1 - \frac{1}{4}} = 0,799... \approx 0,80$$

$q = -\frac{1}{4}$

$$S_9 = \frac{3}{5} \cdot \frac{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^9}{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)} = 0,480... \approx 0,48$$

227.

a) Summan laskemiseen tarvitaan

- jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 3$
- suhdeluku $q = \frac{\frac{9}{2}}{3} = \frac{3}{2}$
- yhteenlaskettavien määrä n .

Muodostetaan lauseke summalle, kun lasketaan yhteen *n* kappaletta jonon jäseniä.

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = 3 \cdot \frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^n}{1-\frac{3}{2}} = 6 \cdot \left(\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1\right)$$

Ratkaistaan epäyhtälö $S_n > 10^{15}$.

$$6 \cdot \left(\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1\right) > 10^{15}$$

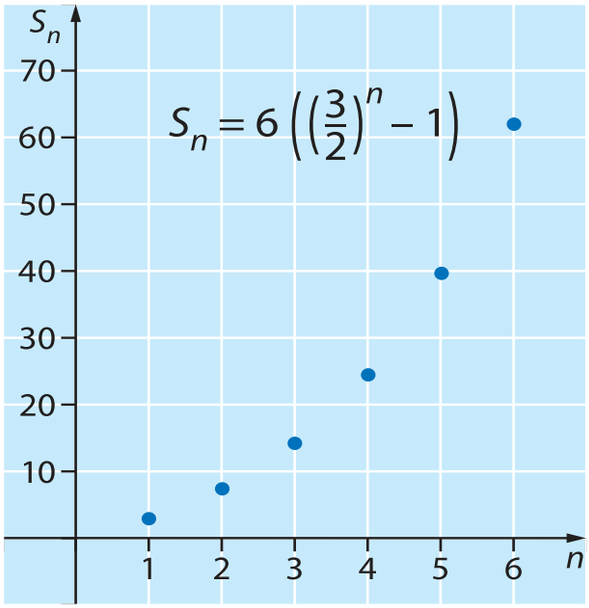
$$n > 80,764...$$

Järjestysnumero *n* on positiivinen kokonaisluku.

Pienin positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa epäyhtälön, on 81.

b) Summista muodostuvan lukujonon yleinen jäsen on $S_n = 6 \cdot \left(\left(\frac{3}{2} \right)^n - 1 \right)$.

Piirretään kuvaaja tämän lukujonon kuudesta ensimmäisestä jäsenestä.



228.

a) Elisen eri päivien peliajan määrät muodostavat geometrisen jonon.

- Jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 120 \cdot 0,975 = 117$
- Jonon suhdeluku $q = 0,975$

Ensimmäisen viikon peliajan määrä saadaan, kun lasketaan geometrisen jonon seitsemän ensimmäisen jäsenen summa.

$$S_7 = 117 \cdot \frac{1 - 0,975^7}{1 - 0,975} = 760,07... \approx 760 \text{ min}$$

b) Jos Elise ei olisi vähentänyt pelaamista, hän olisi pelannut viikon aikana

$120 \cdot 7 = 840$ min

Hänellä jäi aikaa muuhun $840 - 760 = 80$ min

c) Ratkaistaan epäyhtälö $S_n > 50 \cdot 60 = 3000$.

$$117 \cdot \frac{1 - 0,975^n}{1 - 0,975} > 3000$$

$$n > 40,465...$$

Järjestysnumero n on positiivinen kokonaisluku. Pienin positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa epäyhtälön, on 41.

41 päivän kuluttua Elise on pelannut 50 tuntia.

4 Lisämateriaali

4.1 Suuntakulma

229.

a) Lasketaan ensin suoran kulmakerroin.

$$k = \frac{4-3}{3-(-2)} = \frac{1}{5}$$

Ratkaistaan suuntakulma α tangentin avulla.

$$\tan\alpha = \frac{1}{5}$$
$$\alpha = 11,3099...^\circ$$
$$\alpha \approx 11^\circ$$

b) Suoran kulmakerroin on $k = -6$. Ratkaistaan suuntakulma α tangentin avulla.

$$\tan\alpha = -6$$
$$\alpha = -80,537...^\circ$$
$$\alpha \approx -81^\circ$$

c) Kirjoitetaan suoran yhtälö ensin ratkaistussa muodossa.

$$3x - 5y + 10 = 0$$

$$y = \frac{3}{5}x + 2$$

Suoran kulmakerroin on $k = \frac{3}{5}$.

Ratkaistaan suuntakulma α tangentin avulla.

$$\tan\alpha = \frac{3}{5}$$

$$\alpha = 30,963...^\circ$$

$$\alpha \approx 31^\circ$$

230.

a) Suoran kulmakerroin on $k = \frac{1}{7}$. Ratkaistaan suuntakulma α tangentin avulla.

$$\tan\alpha = \frac{1}{7}$$
$$\alpha = 8{,}13...^\circ$$
$$\alpha \approx 8^\circ$$

b) Suoran kulmakerroin on $k = -1$. Ratkaistaan suuntakulma α tangentin avulla.

$$\tan\alpha = -1$$
$$\alpha = -45^\circ$$

c) Kirjoitetaan suoran yhtälö ensin ratkaistussa muodossa.

$$3x + 2y - 8 = 0$$

$$y = -\frac{3}{2}x + 4$$

Suoran kulmakerroin on $k = -\frac{3}{2}$.

Ratkaistaan suuntakulma α tangentin avulla.

$$\tan\alpha = -\frac{3}{2}$$

$$\alpha = -56,30...^\circ$$

$$\alpha \approx -56^\circ$$

231.

a) Lasketaan ensin suoran kulmakerroin.

$$k = \frac{9-(-2)}{-3-5} = \frac{11}{-8} = -\frac{11}{8}$$

Ratkaistaan suuntakulma α tangentin avulla.

$$\tan\alpha = -\frac{11}{8}$$
$$\alpha = -53,97...^\circ$$
$$\alpha \approx -54^\circ$$

b) Lasketaan ensin suoran kulmakerroin.

$$k = \frac{2-1}{-2-(-6)} = \frac{1}{4}$$

Ratkaistaan suuntakulma α tangentin avulla.

$$\tan\alpha = \frac{1}{4}$$
$$\alpha = 14,036...^\circ$$
$$\alpha \approx 14^\circ$$

232.

a) Lasketaan ensin suorien kantakulmat.

- Suoran *s* kulmakerroin $k_s = \frac{2}{7}$.

$$\tan\alpha = \frac{2}{7}$$
$$\alpha = 15,945...^\circ$$

- Suoran *t* kulmakerroin $k_t = \frac{4}{5}$.

$$\tan\beta = \frac{4}{5}$$
$$\beta = 38,659...^\circ$$

Molemmat suorat ovat nousevia.

Lasketaan suorien välinen kulma vähentämällä suuremmasta kulmasta pienempi.

$$\beta - \alpha = 38,659...^\circ - 15,945...^\circ = 22,7144...^\circ \approx 23^\circ$$

b) Lasketaan ensin suorien kantakulmat.

- Suoran *s* kulmakerroin $k_s = -\frac{1}{6}$.

$$\tan\alpha = -\frac{1}{6}$$
$$\alpha = -9,4623...^\circ$$

- Suoran *t* kulmakerroin $k_t = -5$.

$$\tan\beta = -5$$
$$\beta = -78,690...^\circ$$

Molemmat suorat ovat laskevia.

Lasketaan suorien välinen kulma vähentämällä pienemmästä kulmasta suurempi.

$$\alpha - \beta = -9,4623...^\circ - (-78,690...^\circ) = 69,227...^\circ \approx 69^\circ$$

c) Lasketaan ensin suorien kantakulmat.

- Suoran *s* kulmakerroin $k_s = -4$.

  $\tan\alpha = -4$

  $\alpha = -75,963...°$

- Suoran *t* kulmakerroin $k_t = \frac{5}{6}$.

  $\tan\beta = \frac{5}{6}$

  $\beta = 39,805...°$

Toinen suora on nouseva ja toinen laskeva.

Vähennetään positiivisesta kulmasta negatiivinen kulma.

$\beta - \alpha = 39,805...° - (-75,963...°) = 115,76...°$

Suorien välisen kulman on oltava alle 90°.

Lasketaan siis vieruskulman suuruus.

$180° - 115,76...° = 64,23...° \approx 64°$

233.

Lasketaan ensin suorien kantakulmat.

- Suoran *s* kulmakerroin $k_s = \frac{9-5}{6-3} = \frac{4}{3}$

  $\tan\alpha = \frac{4}{3}$

  $\alpha = 53{,}130...°$

- Suoran *t* kulmakerroin $k_t = \frac{7-(-6)}{-1-(-5)} = \frac{13}{4}$

  $\tan\beta = \frac{13}{4}$

  $\beta = 72{,}897...°$

Molemmat suorat ovat nousevia.

Lasketaan suorien välinen kulma vähentämällä suuremmasta kulmasta pienempi.

$\beta - \alpha = 72{,}897...° - 53{,}130...° = 19{,}7672...° \approx 19{,}8°$

4.2 Murtopotenssi

234.

a) $\sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{7^1} = 7^{\frac{1}{3}}$

b) $\sqrt[4]{5^3} = 5^{\frac{3}{4}}$

c) $\sqrt[5]{2^4} = 2^{\frac{4}{5}}$

235.

a) $\sqrt[5]{100} = \sqrt[5]{10^2} = 10^{\frac{2}{5}}$

b) $\sqrt[4]{9} = \sqrt[4]{3^2} = 3^{\frac{2}{4}} = 3^{\frac{1}{2}}$

c) $3 \cdot \sqrt[5]{27} = 3^1 \cdot \sqrt[5]{3^3} = 3^1 \cdot 3^{\frac{3}{5}} = 3^{1+\frac{3}{5}} = 3^{\frac{8}{5}}$

236.

a) $5 \cdot \sqrt{25} = 5 \cdot \sqrt{5^2} = 5^1 \cdot 5^{\frac{2}{2}} = 5^{1+1} = 5^2$

b) $3^4 \cdot \sqrt[3]{9} = 3^4 \cdot \sqrt[3]{3^2} = 3^4 \cdot 3^{\frac{2}{3}} = 3^{4+\frac{2}{3}} = 3^{\frac{14}{3}}$

c) $4 \cdot \sqrt[4]{8} = 2^2 \cdot \sqrt[4]{2^3} = 2^2 \cdot 2^{\frac{3}{4}} = 2^{2+\frac{3}{4}} = 2^{\frac{11}{4}}$

237.

a) $2^{\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{2^2} = \sqrt[7]{4}$

b) $5^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{5^3} = \sqrt[4]{125}$

c) $7^{\frac{2}{9}} = \sqrt[9]{7^2} = \sqrt[9]{49}$

238.

Juurimuoto	Murtopotenssi
$\sqrt[5]{3}$	$3^{\frac{1}{5}}$
$\sqrt[9]{16}$	$4^{\frac{2}{9}}$
$2 \cdot \sqrt[5]{16}$	$2^{\frac{9}{5}}$
$\sqrt[7]{125}$	$5^{\frac{3}{7}}$
$7^3 \cdot \sqrt[3]{49}$	$7^{\frac{11}{3}}$

4.3 Briggsin logaritmi

239.

a) Lasketaan muunnettu tulos T sijoittamalla annetut arvot muunnoskaavaan.

19-vuotiaana Seppo hyppäsi 196 cm.

- $a = 19$
- $t = 196\ (\text{cm})$
- $k = 201,4\ (\text{cm})$

$$T = 196 + 201,4 \cdot \lg\frac{19}{35} = 142,565\ldots(\text{cm}) \approx 143\ \text{cm}$$

23-vuotiaana Seppo hyppäsi 200 cm.

- $a = 23$
- $t = 200\ (\text{cm})$
- $k = 201,4\ (\text{cm})$

$$T = 200 + 201,4 \cdot \lg\frac{23}{35} = 163,276\ldots(\text{cm}) \approx 163\ \text{cm}$$

40-vuotiaana Seppo hyppäsi 175 cm.

- $a = 40$
- $t = 175\ (\text{cm})$
- $k = 201,4\ (\text{cm})$

$$T = 175 + 201,4 \cdot \lg\frac{40}{35} = 186,679...(\text{cm}) \approx 187\ \text{cm}$$

Paremmuusjärjestyksessä: 40-vuotiaana hypätty tulos on paras, sitten on 23-vuotiaana hypätty tulos ja viimeisenä on 19-vuotiaana hypätty tulos.

b) Sijoitetaan muunnoskaavaan annetut lukuarvot.

- $T = 233\ (\text{cm})$
- $t = 175\ (\text{cm})$
- $k = 201,4\ (\text{cm})$

$$233 = 175 + 201,4 \cdot \lg\frac{a}{35}$$

$$a = 67,928..$$

$$a \approx 68$$

240.

a) Lasketaan liuoksen pH-arvo sijoittamalla annettu arvo annettuun kaavaan.

$$\left[\mathrm{H_3O^+} \right] = 0,050 \text{ mol/l}$$

$$\mathrm{pH} = -\lg 0,050 = 1,3010 \approx 1,3$$

Liuos on hapan.

b) Sijoitetaan $\mathrm{pH} = 10,4$ annettuun kaavaan ja lasketaan liuoksen oksoniumionikonsentraatio.

$$10,4 = -\lg\left[\mathrm{H_3O^+} \right]$$

$$\left[\mathrm{H_3O^+} \right] = 3,98107... \cdot 10^{-11} \text{ mol/l}$$

$$\left[\mathrm{H_3O^+} \right] \approx 3,98 \cdot 10^{-11} \text{ mol/l}$$

241.

a) Sijoitetaan annetut arvot annettuun kaavaan ja lasketaan järistyksessä vapautunut energia E.

- $M = 9{,}0$

$$1{,}44 \cdot 9{,}0 = \log_{10} E - 5{,}24$$
$$E = 1\,584\,893\,192\,461\,113\,485{,}202...$$
$$E \approx 1{,}6 \cdot 10^{18}$$

b) Lasketaan Kobessa sattuneen järistyksen vapautunut energia E.

$$1{,}44 \cdot 6{,}8 = \log_{10} E - 5{,}24$$
$$E = 1\,076\,465\,213\,629\,834{,}878...$$

Lasketaan kuinka moninkertainen Sendain järistyksessä vapautunut energia Koben järistykseen verrattuna.

$$\frac{E_{\text{Sendai}}}{E_{\text{Kobe}}} = \frac{1\,584\,893\,192\,461\,113\,485{,}202...}{1\,076\,465\,213\,629\,834{,}878...} = 1472{,}312... \approx 1500$$

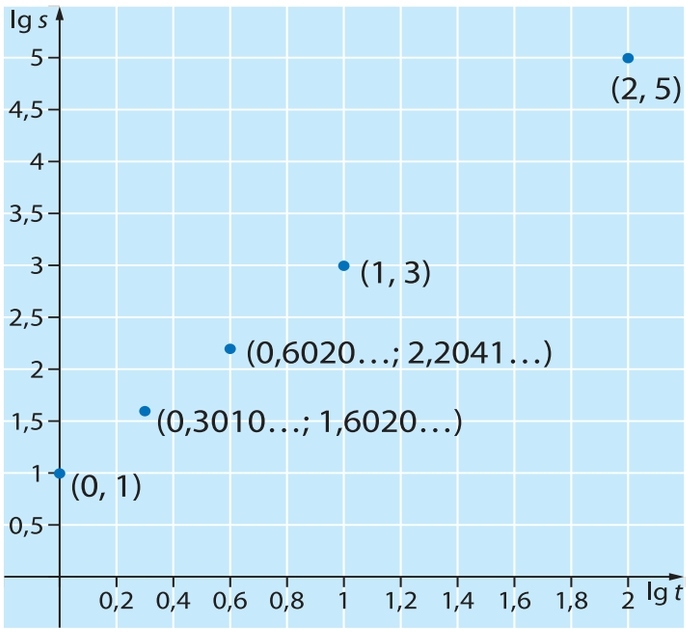
Sendain järistyksessä vapautui 1500-kertainen energiamäärä verrattuna Koben järistykseen.

242.

a)

t	$\lg t$	$\lg s$
1	0	1
2	0,3010…	1,6020…
4	0,6020…	2,2041…
10	1	3
100	2	5

b)



Ajan ja paikan logaritmit asettuvat suoralle, joka leikkaa pystyakselin kohdassa 1. Pisteisiin sovitetun suoran kulmakerroin on 2.

5 Kertaus: Matemaattisia malleja

5.1 Kurssin keskeiset asiat

1.

a) Muodostetaan suoran yhtälö kulmakerroin $k = -2$ ja pisteen $(0, -3)$ avulla.

$$y-(-3)=-2(x-0)$$
$$y+3=-2x$$
$$y=-2x-3$$

b) Muodostetaan suoran yhtälö kulmakerroin $k = -3$ ja pisteen $(1, 2)$ avulla.

$$y-2=-3(x-1)$$
$$y-2=-3x+3$$
$$y=-3x+5$$

2.

a) Lasketaan ensin suoran kulmakerroin k.

$$k = \frac{-5-4}{-1-2} = \frac{-9}{-3} = 3$$

Muodostetaan sitten suoran yhtälö.

$$y - 4 = 3(x - 2)$$
$$y - 4 = 3x - 6$$
$$y = 3x - 2$$

b) Lasketaan ensin suoran kulmakerroin k.

$$k = \frac{1-(-3)}{2-10} = \frac{1+3}{-8} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$$

Muodostetaan sitten suoran yhtälö.

$$y - 1 = -\frac{1}{2} \cdot (x - 2)$$
$$y - 1 = -\frac{1}{2}x + 1$$
$$y = -\frac{1}{2}x + 2$$

3.

a) Lasketaan suoran kulmakerroin k.

$$k = \frac{1-(-8)}{-2-1} = \frac{1+8}{-3} = -\frac{9}{3} = -3$$

Muodostetaan suoran yhtälö.

$$y-1 = -3(x-(-2))$$
$$y-1 = -3(x+2)$$
$$y-1 = -3x-6$$
$$y = -3x-5$$

b) Tutkitaan, onko piste (7, −14) suoralla sijoittamalla pisteen koordinaatit suoran yhtälöön.

$$-14 = -3 \cdot 7 - 5$$
$$-14 = -21 - 5$$
$$-14 = -26$$

Koska saatu yhtälö ei päde, piste (7, −14) ei ole suoralla $y = -3x-5$.

4.

a) Geometrisen jonon yleisen jäsenen määrittämiseksi tarvitaan

- jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 64$
- suhdeluku $q = \frac{32}{64} = \frac{1}{2}$.

Muodostetaan geometrisen jonon yleinen jäsen.

$$a_n = 64 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

b) Lasketaan yleisen jäsenen avulla a_7.

$$\begin{aligned} a_7 &= 64 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{7-1} \\ &= 64 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{6} \\ &= 64 \cdot \frac{1}{2^6} \\ &= 64 \cdot \frac{1}{64} = 1 \end{aligned}$$

5.

a) Aritmeettisen jonon yleisen jäsenen määrittämiseksi tarvitaan

- jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = -10$
- differenssi $d = -7 - (-10) = -7 + 10 = 3$.

Muodostetaan aritmeettisen jonon yleisen jäsenen lauseke.

$$\begin{aligned} a_n &= -10 + (n-1) \cdot 3 \\ &= -10 + 3n - 3 \\ &= 3n - 13 \end{aligned}$$

b) Aritmeettisen jonon yleisen jäsenen määrittämiseksi tarvitaan

- jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = -10$
- differenssi $d = -4$.

Muodostetaan aritmeettisen jonon yleinen jäsen.

$$\begin{aligned} a_n &= -10 + (n-1) \cdot (-4) \\ &= -10 - 4n + 4 \\ &= -4n - 6 \end{aligned}$$

6.

Suora 1:

- kulmakerroin on $k = 2$.
- piste (0, 0) on suoralla.

Suoran yhtälö on

$$y - 0 = 2(x - 0)$$
$$y = 2x$$

Suora 2:

- kulmakerroin on $k = -1$.
- piste (0, 1) on suoralla.

Suoran yhtälö on

$$y - 1 = -1(x - 0)$$
$$y - 1 = -x$$
$$y = -x + 1$$

Suora 3:

- kulmakerroin on $k = 0$.
- piste $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ on suoralla.

Suoran yhtälö on

$$y - \left(-\frac{1}{2}\right) = 0(x - 0)$$

$$y + \frac{1}{2} = 0$$

$$y = -\frac{1}{2}$$

7.

a) $2 = 2^1, x = 1$

b) $2^x = \frac{1}{2}$

$2^x = 2^{-1}$

$x = -1$

c) $2^x = 8^2$

$2^x = (2^3)^2$

$2^x = 2^6$

$x = 6$

d) $3^x = \frac{1}{3^5}$

$3^x = 3^{-5}$

$x = -5$

e) $10^x = 1000$

$10^x = 10^3$

$x = 3$

f) $10^x = 0,01$

$10^x = \frac{1}{100}$

$10^x = \frac{1}{10^2}$

$10^x = 10^{-2}$

$x = -2$

8.

a) $3^{2x} = \frac{1}{9}$

$3^{2x} = \frac{1}{3^2}$

$3^{2x} = 3^{-2}$

$2x = -2 \qquad | : 2$

$x = -1$

b) $4^{3x} = 8^{x-1}$

$(2^2)^{3x} = (2^3)^{x-1}$

$2^{6x} = 2^{3x-3}$

$6x = 3x - 3$

$3x = -3 \qquad | : 3$

$x = -1$

c)

$$\frac{27^{x+2}}{9^{1-3x}} = 1$$

$$\frac{(3^3)^{x+2}}{(3^2)^{1-3x}} = 1$$

$$\frac{3^{3x+6}}{3^{2-6x}} = 3^0$$

$$3^{3x+6-(2-6x)} = 3^0$$

$$3x + 6 - (2 - 6x) = 0$$

$$3x + 6 - 2 + 6x = 0$$

$$9x + 4 = 0$$

$$9x = -4 \qquad \big| : 9$$

$$x = -\frac{4}{9}$$

9.

a) $5^x = 4$

$x = \log_5 4$

b) $2^{3x} = 3$

$3x = \log_2 3 \qquad \left| : 3 \right.$

$x = \dfrac{\log_2 3}{3}$

c) $e^{x-1} = 2$

$x - 1 = \ln 2$

$x = 1 + \ln 2$

10.

a) $x^4 = 81$

$x = \pm\sqrt[4]{81}$

$x = \pm\sqrt[4]{3^4}$

$x = \pm 3$

b) $2x^6 = 10 \quad | : 2$

$x^6 = 5$

$x = \pm\sqrt[6]{5}$

c) $3x^5 - 12 = 0$

$3x^5 = 12 \quad | : 3$

$x^5 = 4$

$x = \sqrt[5]{4}$

11.

a) Muodostetaan aritmeettisen jonon 3. ja 7. jäsen jonon ensimmäisen jäsenen ja differenssi avulla.

$$a_3 = a_1 + (3-1)\cdot d = a_1 + 2d$$
$$a_7 = a_1 + (7-1)\cdot d = a_1 + 6d$$

Lasketaan jonon 3. ja 7. jäsenen erotus.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan differenssi.

$$\begin{aligned} a_7 - a_3 &= 32 - 12 \\ a_1 + 6d - (a_1 + 2d) &= 20 \\ a_1 + 6d - a_1 - 2d &= 20 \\ 4d &= 20 \qquad \vert : 4 \\ d &= 5 \end{aligned}$$

b) Lasketaan ensin jonon ensimmäinen jäsen.

$$a_3 = a_1 + 2d$$
$$12 = a_1 + 2\cdot 5$$
$$a_1 = 12 - 10$$
$$a_1 = 2$$

Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$$\begin{aligned} a_n &= 2 + (n-1)\cdot 5 \\ &= 2 + 5n - 5 \\ &= 5n - 3 \end{aligned}$$

c) Tutkitaan onko luku 57 lukujonon jäsen.

$$
\begin{aligned}
a_n &= 57 \\
5n - 3 &= 57 \\
5n &= 60 \qquad \big| : 5 \\
n &= 12
\end{aligned}
$$

Koska ratkaisuksi tuli positiivinen kokonaisluku, luku 57 on lukujonon jäsen.

12.

a) Muodostetaan geometrisen jonon 2. ja 5. jäsen jonon ensimmäisen jäsenen ja differenssi avulla.

$$a_2 = a_1 \cdot q^{2-1} = a_1 \cdot q$$
$$a_5 = a_1 \cdot q^{5-1} = a_1 \cdot q^4$$

Lasketaan jonon 2. ja 5. jäsenen osamäärä.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan differenssi.

$$\frac{a_5}{a_2} = \frac{48}{-6}$$
$$\frac{a_1 \cdot q^4}{a_1 \cdot q} = -8$$
$$q^{4-1} = -8$$
$$q^3 = -8$$
$$q = \sqrt[3]{-8} = -2$$

b) Lasketaan ensin jonon ensimmäinen jäsen.

$$a_2 = -6$$
$$a_1 \cdot q = -6$$
$$a_1 \cdot (-2) = -6 \qquad \big| : (-2)$$
$$a_1 = 3$$

Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$$a_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}$$

13.

a) Muutetaan yhtälön yleinen jäsen ratkaistuun muotoon.

$$-4x + 2y - 16 = 0$$
$$2y = 4x + 16 \qquad |:2$$
$$y = 2x + 8$$

Ratkaistusta muodosta nähdään, että suoran kulmakerroin on $k = 2$.

b) Suora leikkaa y-akselin, kun $x = 0$. Lasketaan piste sijoittamalla yleiseen jäseneen $x = 0$.

$$y = 2 \cdot 0 + 8$$
$$y = 8$$

Suora leikkaa y-akselin pisteessä (0, 8).

Suora leikkaa x-akselin, kun $y = 0$.

Lasketaan piste sijoittamalla yleiseen jäseneen $y = 0$.

$$0 = 2x + 8$$
$$2x = -8 \qquad |:2$$
$$x = -4$$

Suora leikkaa x-akselin pisteessä $(-4, 0)$

14.

a) Ruokaan joutunut bakteerimäärä saadaan sijoittamalla $x = 0$ funktioon f.

$f(0) = 120 \cdot 1,0353^0 = 120 \cdot 1 = 120$

b) Bakteerien kasvu minuutissa voidaan päätellä funktion suhdeluvusta.

$1,0353 - 1 = 0,0353 = 3,53\ \%$

c) Bakteereja on aluksi 120 kpl. Kun bakteeri jakaantuu kahtia, niitä on $120 \cdot 2 = 240$ kappaletta.

Katsotaan kuvaajasta, milloin bakteereja on 240.

Kuvaajasta nähdään, että bakteeri jakaantuu kahtia 20 minuutissa.

15.

Lasketaan aritmeettisen jonon kymmenen ensimmäisen jäsenen summa summakaavalla.

Siihen tarvitaan

- ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 2 + 3 \cdot 1 = 2 + 3 = 5$
- viimeinen yhteenlaskettava $a_{10} = 2 + 3 \cdot 10 = 32$
- yhteenlaskettavien määrä $n = 10$.

$$
\begin{aligned}
S_{10} &= n \cdot \frac{a_1 + a_{10}}{2} \\
&= 10 \cdot \frac{5 + 32}{2} \\
&= 10 \cdot \frac{37}{2} \\
&= \frac{370}{2} \\
&= 185
\end{aligned}
$$

16.

Muodostetaan jonon kuudennen ja seitsemännen jäsenen keskiarvo ja ratkaistaan siitä jonon seitsemäs jäsen.

$$\frac{a_6 + a_7}{2} = 27$$

$$\frac{25 + a_7}{2} = 27 \qquad \left|\cdot 2\right.$$

$$25 + a_7 = 54$$

$$a_7 = 29$$

Muodostetaan aritmeettisen jonon kuudes ja seitsemäs jäsen jonon ensimmäisen ja differenssin avulla.

$$a_6 = a_1 + (6-1)\cdot d = a_1 + 5d$$

$$a_7 = a_1 + (7-1)\cdot d = a_1 + 6d$$

Muodostetaan yhtälöpari, ja ratkaistaan siitä jonon ensimmäinen jäsen ja differenssi.

$$\begin{cases} a_1 + 5d = 25 \\ a_1 + 6d = 29 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 25 - 5d \\ a_1 = 29 - 6d \end{cases}$$

$25 - 5d = 29 - 6d$ ja $a_1 = 25 - 5\cdot 4 = 5$

$$d = 4$$

Muodostetaan jonon kuuden ensimmäisen jäsenen summa summakaavalla.

$$S_6 = 6\cdot\frac{5+25}{2} = 6\cdot\frac{30}{2} = 6\cdot 15 = 90$$

17.

Geometrisen jonon kuuden ensimmäisen jäsen summa voidaan laskea summakaavalla.

Summakaavaan tarvitaan:

- ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = -3$
- suhdeluku $q = 2$
- yhteenlaskettavien määrä $n = 6$

$$
\begin{aligned}
S_6 &= a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \\
&= -3 \cdot \frac{1-2^6}{1-2} \\
&= -3 \cdot \frac{1-64}{1} \\
&= -3 \cdot \frac{63}{1} \\
&= -189
\end{aligned}
$$

18.

a) Suoran $y = 2x + 3$ kulmakerroin on 2.

Merkitään normaalin kulmakerrointa kirjaimella *k*. Suoran ja sen normaalin kulmakertoimien tulo on -1.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan *k*.

$$2 \cdot k = -1 \qquad \big| : 2$$

$$k = -\frac{1}{2}$$

Lasketaan, missä pisteessä suora $y = 2x + 3$ leikkaa *y*-akselin.

Suora leikkaa *y*-akselin, kun $x = 0$.

$$y = 2 \cdot 0 + 3$$

$$y = 3$$

Suora $y = 2x + 3$ leikkaa *y*-akselin pisteessä (0, 3).

Muodostetaan normaalin yhtälö.

$$y - 3 = -\frac{1}{2} \cdot (x - 0)$$

$$y - 3 = -\frac{1}{2} x$$

$$y = -\frac{1}{2} x + 3$$

b) Suora *t* on yhdensuuntainen suoran $y = 2x + 3$ kanssa, joten niillä on sama kulmakerroin $k = 2$.

Muodostetaan suoran *t* yhtälö.

$$y - 5 = 2(x - 2)$$
$$y - 5 = 2x - 4$$
$$y = 2x + 1$$

c) Määritetään suorien *n* ja *t* leikkauspiste.

Lasketaan leikkauspisteen *x*-koordinaatti.

$$2x + 1 = -\frac{1}{2}x + 3$$
$$\frac{5}{2}x = 2 \qquad \Big| : \frac{5}{2}$$
$$x = 2 \cdot \frac{2}{5}$$
$$x = \frac{4}{5}$$

Lasketaan leikkauspisteen *y*-koordinaatti.

$$y = 2 \cdot \frac{4}{5} + 1 = \frac{8}{5} + 1 = \frac{13}{5}$$

Suorien *n* ja *t* leikkauspiste on $\left(\frac{4}{5}, \frac{13}{5} \right)$.

19.

a) Platinan paino alussa saadaan sijoittamalla $x = 0$ funktioon f.

$$f(0) = 50 \cdot 0,943^0 = 50 \cdot 1 = 50$$

Platinaa oli alussa 50 g.

b) Platinan hajoamisen määrä prosentteina tunnissa voidaan päätellä funktion suhdeluvusta.

$$1 - 0,943 = 0,057 = 5,7\ \% \approx 6\ \%$$

c) Ainetta on alussa 50 g. Kun ainetta on hajonnut puolet, sitä on jäljellä $\frac{50\ \text{g}}{2} = 25\ \text{g}$.

Tutkitaan kuvaajasta, kuinka monen tunnin päästä isotooppia on jäljellä 25g.

Kuvaajasta voidaan nähdä, että isotoopin puoliintumisaika on 10 tuntia.

20.

a) Muodostetaan riippuvuutta kuvaava suoran yhtälö pisteiden (30, 10) ja (15, 7) avulla.

- Suoran kulmakerroin on $k = \frac{10-7}{30-15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$.

Muodostetaan suoran yhtälö.

$$y - 7 = \frac{1}{5}(x - 15)$$

$$y - 7 = \frac{1}{5}x - 3$$

$$y = \frac{1}{5}x + 4$$

b) Sijoittamalla $x = 10$ suoran yhtälöön saadaan arvosana 10 pisteellä.

$$y = \frac{1}{5} \cdot 10 + 4 = \frac{10}{5} + 4 = 2 + 4 = 6$$

c) Sijoittamalla $y = 8$ suoran yhtälöön, saadaan pistemäärä, jolla saa arvosanan 8.

$$8 = \frac{1}{5}x + 4$$

$$\frac{1}{5}x = 4 \qquad \left| \cdot 5 \right.$$

$$x = 20$$

21.

a) Korttien määrä eri pinoissa muodostaa aritmeettisen jonon.

Aritmeettisen jonon muodostamiseksi tarvitaan

- jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 1$
- jonon differenssi $d = 2$.

Jonon yleinen jäsen on

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + (n-1) \cdot 2 \\ &= 1 + 2n - 2 \\ &= 2n - 1 \end{aligned}$$

b) Kahdeksannen pinon korttimäärä saadaan laskemalla jonon kahdeksas jäsen.

$$a_8 = 2 \cdot 8 - 1 = 16 - 1 = 15$$

c) Lasketaan kuinka monta korttia pinoihin menee summakaavan avulla.

$$\begin{aligned} S_8 &= 8 \cdot \frac{1+15}{2} \\ &= 8 \cdot \frac{16}{2} \\ &= 8 \cdot 8 = 64 \end{aligned}$$

Kahdessa pakassa on $52 \cdot 2 = 104$ korttia.

Kahdeksan pinon ulkopuolelle jää $104 - 64 = 40$ korttia.

22.

a) Jonon yleisestä jäsenestä $a_n = -2n + 3$ huomataan, että jono on aritmeettinen.

Lasketaan jonon yleisen jäsenen avulla $a_n = -2n + 3$:

- Summan ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_4 = -2 \cdot 4 + 3 = -8 + 3 = -5$
- Summan viimeinen yhteenlaskettava on $a_{13} = -2 \cdot 13 + 3 = -26 + 3 = -23$

Summassa yhteenlaskettavia on $n = 13 - 3 = 10$.

Muodostetaan summa summakaavan avulla.

$$S_{10} = 10 \cdot \frac{-5 + (-23)}{2} = 10 \cdot \frac{-28}{2} = 10 \cdot (-14) = -140$$

b) Jonon yleisestä jäsenestä $a_n = (-2)^{n-1}$ huomataan, että jonon on geometrinen.

Jonon yleisen jäsenen avulla nähdään

- summan ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = (-2)^{3-1} = (-2)^2 = 4$
- jonon suhdeluku $q = -2$

Yhteenlaskettavien määrä on $n = 8 - 2 = 6$

$$S_6 = 4 \cdot \frac{1 - (-2)^6}{1 - (-2)} = 4 \cdot \frac{1 - 64}{1 + 2} = 4 \cdot \frac{-63}{3} = 4 \cdot (-21) = -84$$

23.

a) Kiian television katselun määrä eri kuukausina muodostaa aritmeettisen jonon.

- Jonon ensimmäinen jäsen on tammikuussa television katselun määrä $a_1 = 60$.
- Jonon differenssi on $d = -4$.

Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$$\begin{aligned} a_n &= 60 + (n-1) \cdot (-4) \\ &= 60 - 4n + 4 \\ &= -4n + 64 \end{aligned}$$

b) Elokuu on vuoden 8. kuukausi, joten se on jonon 8. jäsen.

Lasketaan jonon 8. jäsenen arvo yleisen jäsenen avulla.

$$a_8 = -4 \cdot 8 + 64 = -32 + 64 = 32$$

Kiia katselee elokuussa 32 tuntia.

c) Vuodessa on 12 kuukautta, joten yhteenlaskettavien määrä on $n = 12$.

Lasketaan jonon 12. jäsenen arvo.

$$a_{12} = -4 \cdot 12 + 64 = -48 + 64 = 16$$

Lasketaan jonon 12 ensimmäisen jäsenen summa summakaavan avulla.

$$\begin{aligned} S_{12} &= 12 \cdot \frac{60 + 16}{2} \\ &= 12 \cdot \frac{76}{2} \\ &= 12 \cdot 38 \\ &= 456 \end{aligned}$$

24.

a) Muokataan suoran yhtälö ratkaistuun muotoon.

$$(2a-1)x+6y+2=0$$

$$6y=-(2a-1)x-2 \qquad \big|:6$$

$$y=\frac{-(-2a-1)}{6}x-\frac{2}{3}$$

$$y=\frac{1-2a}{6}x-\frac{1}{3}$$

Suora on x-akselin suuntainen, kun suoran yhtälössä x:n kerroin on 0.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan a.

$$\frac{1-2a}{6}=0 \qquad \big|\cdot 6$$

$$1-2a=0$$

$$2a=1 \qquad \big|:2$$

$$a=\frac{1}{2}$$

b) Suora on laskeva, kun suoran yhtälössä x:n kerroin on pienempää kuin nolla.

Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan a.

$$\frac{1-2a}{6} < 0 \qquad \big|\cdot 6$$
$$1-2a < 0$$
$$-2a < -1 \qquad \big|: (-2)$$
$$a > \frac{1}{2}$$

c) Sijoitetaan piste $(1, -1)$ suoran yhtälöön ja ratkaistaan a.

$$-1 = \frac{1-2a}{6} \cdot 1 - \frac{1}{3}$$
$$\frac{1-2a}{6} = -1 + \frac{1}{3} \qquad \big|\cdot 6$$
$$1-2a = -6 + 2$$
$$-2a = -5 \qquad \big|: (-2)$$
$$a = \frac{5}{2}$$

25.

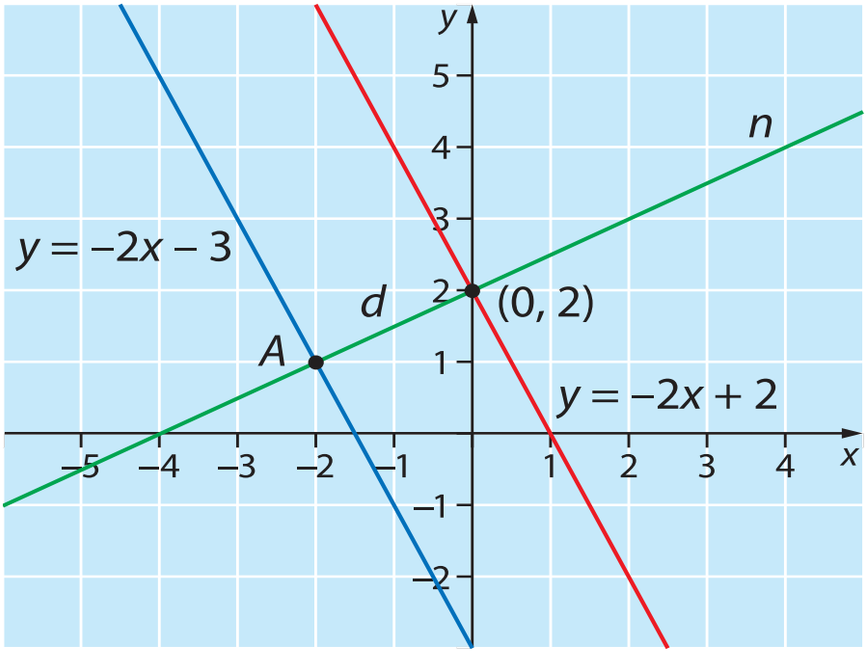
Suorista tiedetään:

- Suorat ovat samansuuntaisia suoria, joten niillä on sama normaali.
- Suora $y = -2x + 2$ kulkee pisteen (0, 2) kautta (*y*-akselin leikkauspiste).

Piirretään kuva suorista. Suorien etäisyys on suorien kohtisuora etäisyys.

Piirretään pisteen (0, 2) kautta suoralle $y = -2x + 2$ normaali *n*.

Merkitään suoran ja sen normaalin leikkauspistettä kirjaimella *A* ja suorien etäisyyttä kirjaimella *d*.



Suorien etäisyys *d* on pisteiden (0, 2) ja *A* välinen etäisyys.

Piste *A* on normaalilla, joten määritetään ensin normaalin yhtälö.

Koska suoran $y = -2x + 2$ kulmakerroin on $k = -2$, niin normaalin *n* kulmakerroin on $k_n = \frac{1}{2}$.

Muodostetaan normaalin yhtälö kulmakertoimen $k_n = \frac{1}{2}$ ja pisteen (0, 2) avulla.

$$y - 2 = \frac{1}{2}(x - 0)$$

$$y - 2 = \frac{1}{2}x$$

$$y = \frac{1}{2}x + 2$$

Lasketaan suorien leikkauspisteen *A* koordinaatit yhtälöparin avulla.
Lasketaan *x*-koordinaatti.

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 2 \\ y = -2x - 3 \end{cases}$$

$$-2x - 3 = \frac{1}{2}x + 2$$

$$\frac{5}{2}x = -5 \qquad \left| : \frac{5}{2} \right.$$

$$x = -5 \cdot \frac{2}{5} = -2$$

Lasketaan y-koordinaatti.

$$y = -2 \cdot (-2) - 3 = 4 - 3 = 1$$

Leikkauspisteen A koordinaatit ovat $(-2, 1)$.

Lasketaan pisteiden $(-2, 1)$ ja $(0, 2)$ etäisyys.

$$d = \sqrt{(0-(-2))^2 + (2-1)^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

5.2 Matemaattisia malleja

26.

a) Muodostetaan vuoden 2014 ja 2018 asukaslukujen avulla yhtälöpari.

$$\begin{cases} 607\,417 = a(2\,014 - 2\,014) + b \\ 629\,894 = a(2\,018 - 2\,014) + b \end{cases}$$

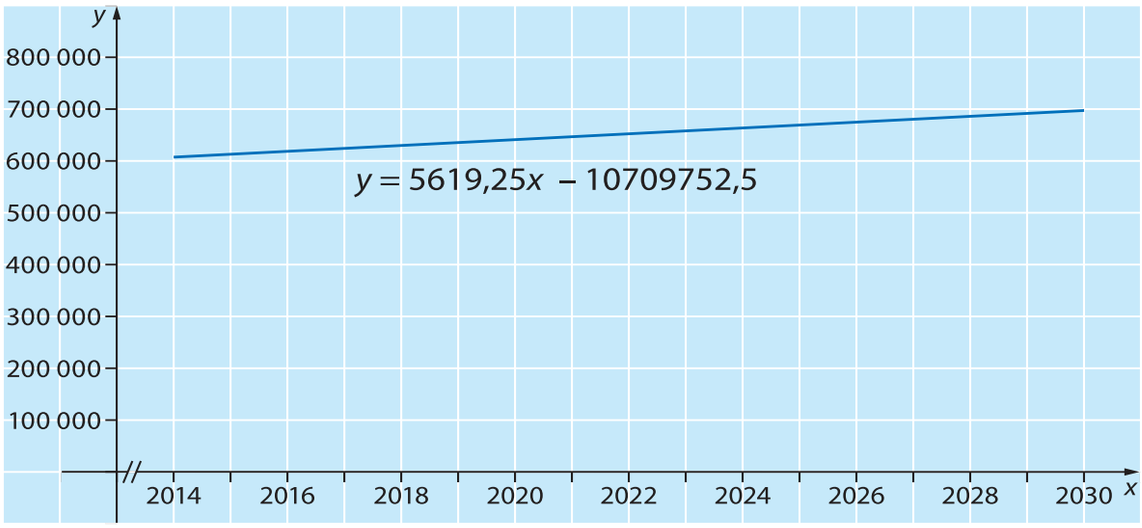
$b = 607\,417$ ja $a = 5\,619,25$

b) Lasketaan vuoden 2030 asukasluku.

$$y = 5619,25 \cdot (2030 - 2014) + 607\,417 = 697\,325$$

Asukasluvun kasvu aikavälillä 2014 – 2030 on
$697\,325 - 607\,417 = 89\,908 \approx 90\,000$.

c)



27.

a) Riippuvuutta kuvaava suora kulkee pisteiden (150, 3000) ja (330, 4800) kautta.

Lasketaan ensin suoran kulmakerroin.

$$k = \frac{4800 - 3000}{330 - 150} = 10$$

Muodostetaan suoran yhtälö.

$$y - 3000 = 10(x - 150)$$
$$y = 10x + 1500 \text{ (€)}$$

b) Viikon myyntitulot, kun mainontaan käytetään 280 €, saadaan sijoittamalla suoran yhtälöön $x = 280$.

$$y = 10 \cdot 280 + 1500 = 4300 \text{ €}$$

c) Mainontaan käytettävä rahamäärä saadaan sijoittamalla suoran yhtälöön $y = 8000$.

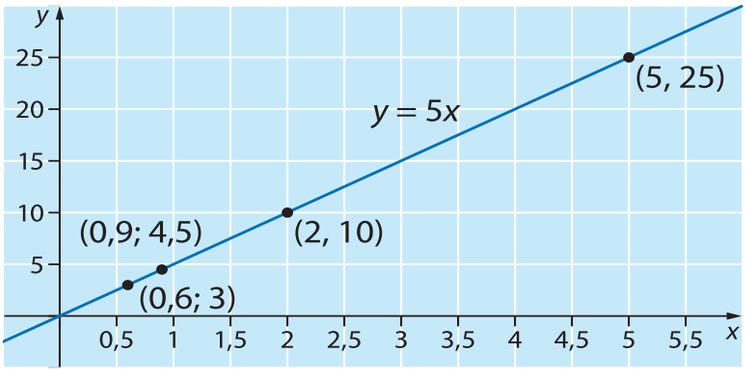
$$8000 = 10x + 1500$$
$$x = 650 \text{ (€)}$$

d) Kauppiaan on saatava viikossa vähintään 2 000 euron myyntitulot. Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan x.

$$2000 \leq 10x + 1500$$
$$x \geq 50 \text{ (€)}$$

28.

a)



Suoran yhtälö on $y = 5x$ (km)

b) Oonan kävelymatka 1,2 tunnissa saadaan sijoittamalla $x = 1{,}2$ suoran yhtälöön.

$y = 5 \cdot 1{,}2 = 6{,}0\,\text{km}$

c) Oonan kävelymatka 30 minuutissa saadaan sijoittamalla $x = 0{,}5$ suoran yhtälöön.

$y = 5 \cdot 0{,}5 = 2{,}5\,\text{km}$

d) 9,4 km:n kävelylenkkiin kulunut aika saadaan sijoittamalla $y = 9{,}4$ suoran yhtälöön.

$$9{,}4 = 5x$$
$$x = 1{,}88 \text{ h}$$

e) 1,8 km:n kävelylenkkiin kulunut aika saadaan sijoittamalla $y = 1{,}8$ suoran yhtälöön.

$$1{,}8 = 5x$$
$$x = 0{,}36 \text{ h} = 21{,}6 \text{ min}$$
$$x \approx 22 \text{ min}$$

29.

a) Lääkärikäynneistä maksetaan 75,00 euron vuosimaksu ja sen lisäksi 10,50 euron kertamaksu.

Tutkitaan taulukon avulla vuoden lääkärinmaksujen määrä eri käyntimäärillä.

Lääkärikäyntien määrä vuodessa	Kokonaiskustannukset (€)
0	$75,00$
3	$75,00+10,50\cdot 3$
x	$75,00+10,50\cdot x$

Riippuvuutta kuvaava suoran yhtälö on $y=10,5x+75$ (€).

b) Ilman kanta-asiakas pakettia lääkärissä käynti maksaa 21,80 € kerralta.

Tutkitaan taulukon avulla vuoden lääkärimaksujen määrää eri käyntimäärillä.

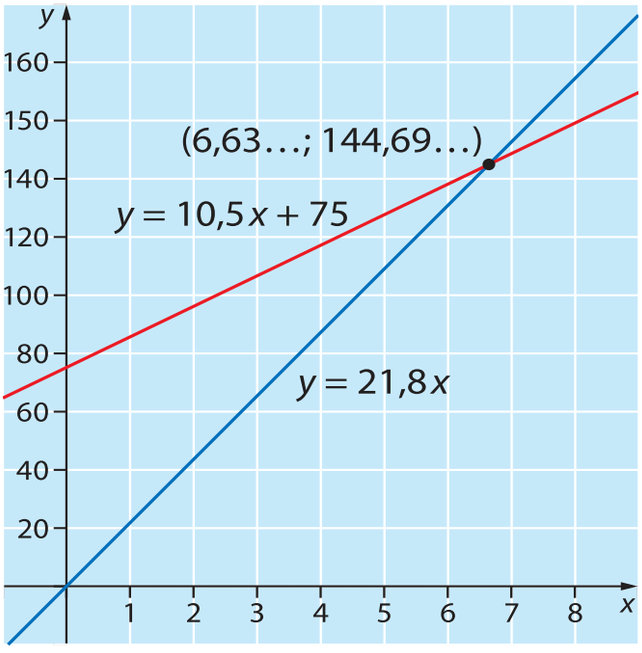
Lääkärikäyntien määrä vuodessa	Kokonaiskustannukset (€)
1	$21,80$
3	$21,80\cdot 3$
x	$21,80\cdot x$

Riippuvuutta kuvaava suoran yhtälö on $y=21,8x$.

Lasketaan, milloin kanta-asiakaspaketin kokonaiskustannukset ovat pienemmät kuin ilman kanta-asiakaspakettia.

$$10,5x + 75 < 21,8x$$

$$x > 6,637...$$



Lääkärissä tulee käydä vähintään 7 kertaa, jotta kanta-asiakaspaketti on kannattava.

30.

a) Koska ilman lämpötila laskee lineaarisesti, se laskee joka kilometri saman verran.

Tiedetään, että merenpinnan tasolla lämpötila on +15 °C ja 11 km:n korkeudessa lämpötila on –56 °C.

Lasketaan kuinka monta astetta lämpötila laski joka kilometrillä.

$$\frac{-56-15}{11-0} = \frac{-71}{11} = -6,4545... \approx -6,5\ °\text{C}$$

b) Mallin mukaan lämpötila kulkee lineaarisesti pisteiden (0, 15) ja (11, −56) kautta. Lasketaan ensin suoran kulmakerroin.

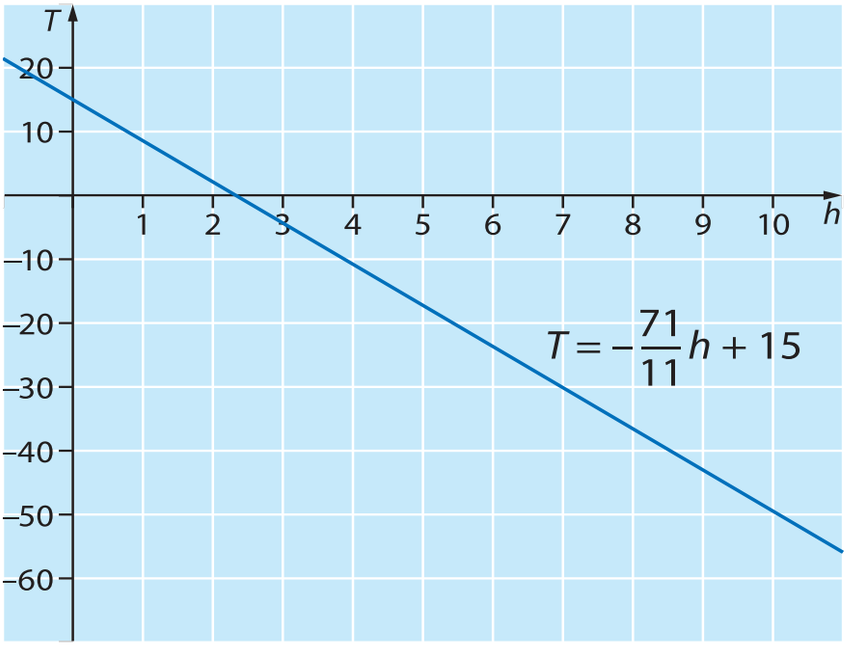
$$k = \frac{-56-15}{11-0} = -\frac{71}{11}$$

Muodostetaan suoran yhtälö.

$$T - 15 = -\frac{71}{11}(h-0)$$

$$T = -\frac{71}{11}h + 15 \ (°\text{C})$$

Piirretään kuvaaja.

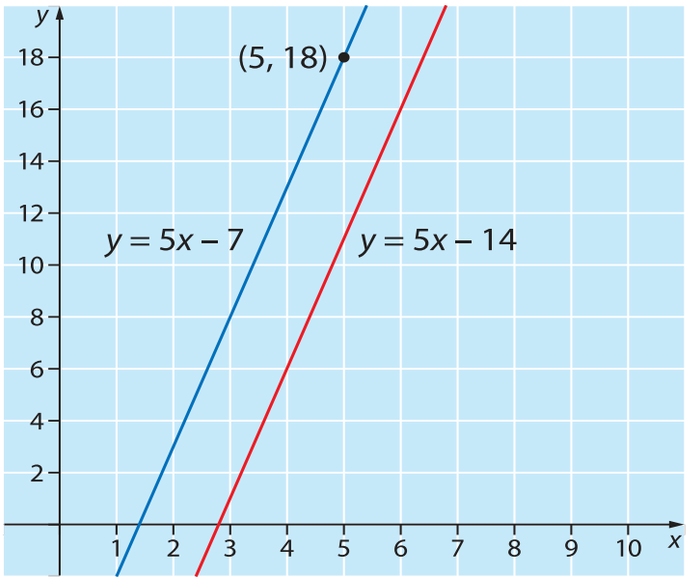


31.

a) Koska tie on joka kohdasta yhtä leveä, tien reunaa kuvaavat suorat ovat yhdensuuntaiset. Tällöin kummankin suoran kulmakerroin on $k = 5$.

Muodostetaan Petruksen puoleista valtatien reunaa kuvaavan suoran yhtälö.

$$y - 18 = 5(x - 5)$$
$$y = 5x - 7$$



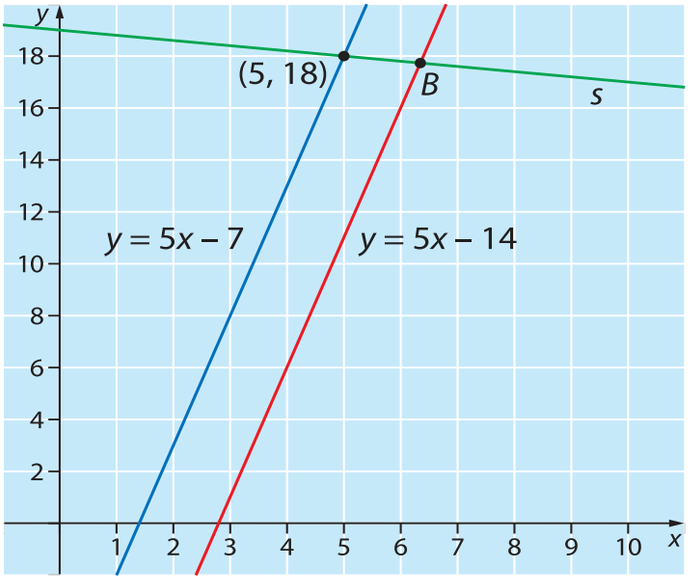
b) Muodostetaan ensin tien reunoja kuvaavia suoria kohtisuora suora s, joka kulkee pisteen (5, 18) kautta.

Koska tien reunoja kuvaavien suorien kulmakerroin $k = 5$, niin suoran s kulmakerroin on $k_s = -\frac{1}{5}$.

Muodostetaan suoran s yhtälö.

$$y - 18 = -\frac{1}{5}(x - 5)$$

$$y = -\frac{1}{5}x + 19$$



Lasketaan suoran s ja suoran $y = 5x - 14$ leikkauspisteen B koordinaatit.

$$\begin{cases} y = 5x - 14 \\ y = -\frac{1}{5}x + 19 \end{cases}$$

$$x = \frac{165}{26} \text{ ja } y = \frac{461}{26}$$

Tien leveys saadaan, kun lasketaan pisteiden B ja (5, 18) välinen etäisyys.

$$d = \sqrt{\left(5 - \frac{165}{26}\right)^2 + \left(18 - \frac{461}{26}\right)^2} = 1,3728...$$

Koordinaatiston yksikkönä on 10 m, joten tien leveys on

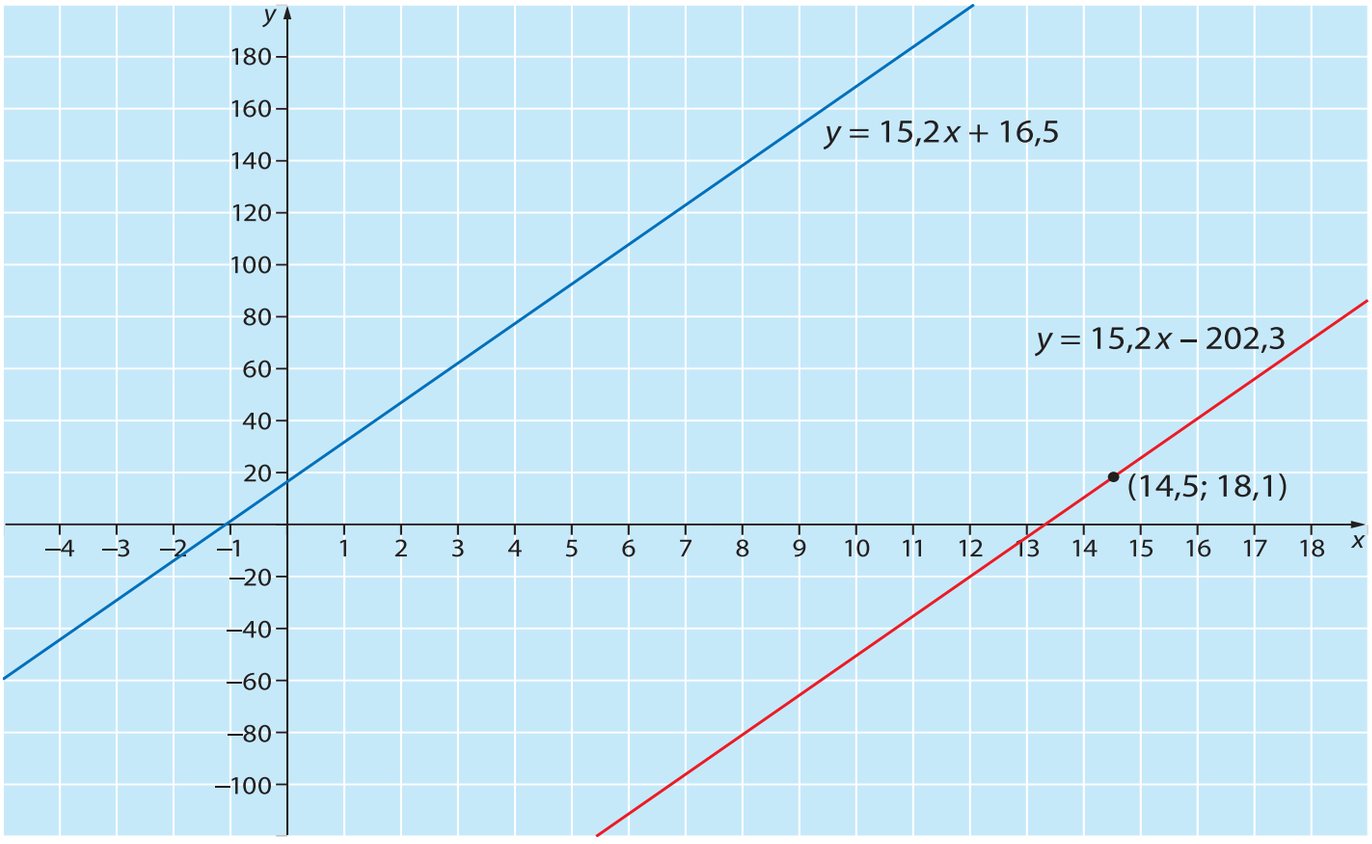
$1,3728... \cdot 10 \text{ m} = 13,728... \text{ m} \approx 13,7 \text{ m}$.

32.

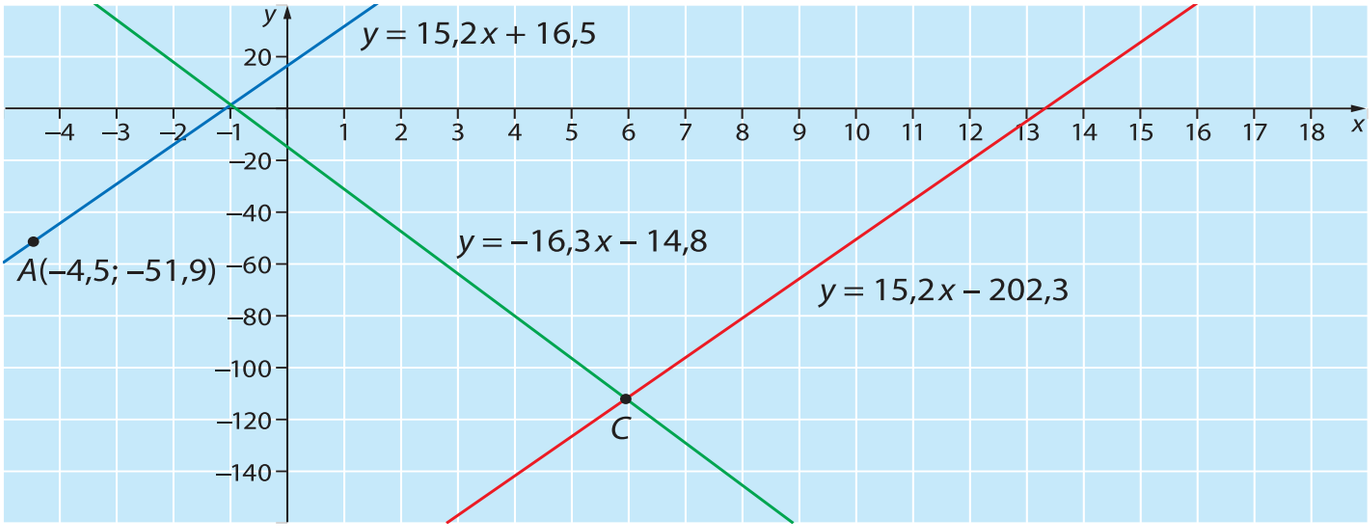
a) Lentokoneet lentävät yhdensuuntaisesti, tällöin kummankin suoran kulmakerroin on $k = 15,2$.

Muodostetaan lentokoneen B reittiä kuvaava suoran yhtälö.

$$y - 18,1 = 15,2(x - 14,5)$$
$$y = 15,2x - 202,3$$



b) Piirretään kuva tilanteesta.



Lasketaan suoran $y = -16,3x - 14,8$ ja suoran $y = 15,2x - 202,3$ leikkauspiste yhtälöparin avulla.

$$\begin{cases} y = 15,2x - 202,3 \\ y = -16,3x - 14,8 \end{cases}$$

$x = 5,952...$ ja $y = -111,823...$

Lasketaan pisteen $C(5,952\ldots; -111,823\ldots)$ ja pisteen $A(-4,5; -51,9)$ etäisyys.

$$d = \sqrt{(5,952... - (-4,5))^2 + (-111,823... - (-51,9))^2} = 60,828...$$

Koordinaatiston yksikkö on 1 kilometri, joten lentokoneiden A ja C etäisyys on

$60,828... \cdot 1\,\text{km} = 60,828...\,\text{km} \approx 61\,\text{km}$.

33.

a) Vakion a kaksidesimaalinen likiarvo saadaan muodostetaan annetuilla arvoilla yhtälö.

$$N(40) = N(0)e^{a\cdot 40}$$
$$2\,600\,000\,000 = 2300 \cdot e^{40a}$$
$$a = 0,3484...$$
$$a \approx 0,35$$

b) Lukumäärä noudattaa mallia $N(t) = N(0)e^{at}$.

Tutkitaan, millä *t*:n arvolla $e^{at} = 2$, eli monentena vuonna transistoreiden lukumäärä kaksinkertaistuu.

$$e^{at} = 2$$
$$at = \ln 2$$
$$t = \frac{\ln 2}{a}$$
$$t = 1,9892...$$
$$t \approx 2$$

34.

a) Muodostetaan ensin loton päävoittojen suuruuden kasvua kuvaava prosenttikerroin.

$100\,\% + 7{,}2\,\% = 107{,}2\,\% = 1{,}072$

Loton päävoittojen suuruutta x vuoden kuluttua kuvaa funktio
$f(x) = 57\,800 \cdot 1{,}072^x$ (€)

b) Vuonna 2015 on kulunut aikaa $2015 - 1971 = 44$ vuotta.

$f(44) = 57\,800 \cdot 1{,}072^{44} = 1\,231\,681{,}4313... € \approx 1\,230\,000$ €

c) Keskimääräinen päävoiton suuruus on yli 1 000 000 €, kun
$f(x) > 1\,000\,000$.

$$57\,800 \cdot 1{,}072^x > 1\,000\,000$$
$$x > 41{,}0028$$

Suurin kokonaisluku, joka toteuttaa ehdon on 42.

Tuolloin vuosi oli $1971 + 42 = 2013$.

d) Merkitään kasvua kuvaavaa prosenttikerrointa kirjaimella a.

Vuonna 1995 on kulunut $1995 - 1971 = 24$ vuotta aikaa tarkastelun alusta lukien.

Muodostetaan tietojen avulla potenssiyhtälö.

$$57\,800 \cdot a^{24} = 500\,000$$
$$a = \pm 1,0940...$$

Potenssikerroin ei voi olla negatiivinen luku, joten $a = 1,0940\ldots$

Päävoitto suurenee vuosittain $1,0940... - 1 = 0,0940... = 9,40...\,\% \approx 9,4\,\%$.

35.

Vuonna 1987 aloitetaan radioaktiivisuuden tarkastelu. Tuolloin Hämeessä ja Keski-Suomessa radioaktiivisuus oli 78 kBq/m^2. Vuonna 2006 tämä oli laskenut arvoon 50 kBq/m^2.

Radioaktiivisuus vähenee eksponentiaalisesti (geometrinen jono). Merkitään radioaktiivisuuden vähenemistä kuvaavaa prosenttikerrointa kirjaimella a.

Vuonna 2006 aikaa on kulunut $2006-1987=19$ vuotta.

Jonon ensimmäinen jäsen on $a_1=78$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan a.

$$78\cdot a^{19}=50$$
$$a=0,97686...$$

Radioaktiivisuus on vähentynyt puoleen, kun radioaktiivisuus on
$\frac{78\ \text{kBq/m}^2}{2}=39\ \text{kBq/m}^2$.

Merkitään vuosien määrää kirjaimella t. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä t.

$$78\cdot 0,97686...^{t}=39$$
$$t=29,615...$$

Radioaktiivisuus on vähentynyt puoleen vuonna $1987+30=2017$.

Radioaktiivisuus on vähentynyt neljännekseen, kun radioaktiivisuus on $\frac{78\ \text{kBq/m}^2}{4} = 19,5\ \text{kBq/m}^2$.

Merkitään vuosien määrää kirjaimella *t*. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä *t*.

$$78 \cdot 0,97686...^{t} = 19,5$$
$$t = 59,231...$$

Radioaktiivisuus on vähentynyt neljännekseen vuonna $1987 + 60 = 2047$.

Vaasan seudun aktiivisuus on vähentynyt puoleen vuonna 2017, koska puoliintumisaika ei riipu lähtötasosta.

36.

a) Maksuhäiriöiden lukumäärä kasvoi tällä aikavälillä

$$\frac{1\,460\,500 - 422\,500}{422\,500} = 2,45680... = 245,680...\,\% \approx 246\,\%$$

b) Koska joka vuosi maksuhäiriöisien määrä vähenee yhtä monta prosenttia, tämä voidaan kuvata geometrisena jonona.

Merkitään vähenemistä kuvaavaa prosenttikerrointa kirjaimella *k*.

Jonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 1\,460\,500$ ja (neljän vuoden kuluttua) viides jäsen on $a_5 = 422\,500$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan *k*.

$$a_1 \cdot k^{5-1} = a_5$$
$$1\,460\,500 \cdot k^4 = 422\,500$$
$$k = 0,7333...$$

Vuotuinen vähenemisprosentti on
$1 - 0,7333... = 0,2666... = 26,66...\,\% \approx 26,7\,\%$

37.

a) Lineaarinen kasvaminen voidaan kuvata aritmeettisena jonona.

Puhelimien myynti tammikuun aikana on jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 7\,817$.

Merkitään jonon differenssiä kirjaimella *d*.

Huhtikuu on jonon 4. jäsen.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan jonon differenssi.

$$a_1 + (4-1)\cdot d = a_4$$
$$7817 + 3d = 13\,238$$
$$d = 1807$$

Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$$a_n = 7\,817 + (n-1)\cdot 1\,807 = 1\,807n + 6\,010$$

Joulukuu on jonon 12. jäsen.

Lasketaan joulukuun myynti.

$$a_{12} = 1807\cdot 12 + 6010 = 27\,694$$

b) Eksponentiaalinen kasvaminen voidaan kuvata geometrisella jonolla.

Puhelimien myynti tammikuun aikana on jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 7817$.

Merkitään myynnin kasvamista kuvaavaa prosenttikerrointa kirjaimella *k*.

Huhtikuu on jonon 4. jäsen.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan jonon differenssi.

$$a_1 \cdot k^{4-1} = a_4$$
$$7\,817 \cdot k^3 = 13\,238$$
$$k = 1{,}1919...$$

Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$$a_n = 7817 \cdot 1{,}1919...^{n-1}$$

Joulukuu on jonon 12. jäsen. Lasketaan joulukuun myynti.

$$a_{12} = 7817 \cdot 1{,}1919^{12-1} = 53\,939{,}686... \approx 53\,940$$

38.

a) Peräkkäisten sävelten taajuussuhde on vakio, joten taajuuksien suuruutta voidaan kuvata geometrisen jonon avulla.

Jonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 261,6$ ja jonon 13. jäsen on $a_{13} = 261,6 \cdot 2 = 523,2$.

Merkitään taajuuden kasvamista kuvaavaa prosenttikerrointa kirjaimella *k*.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan jonon prosenttikerroin *k*.

$$a_1 \cdot k^{13-1} = a_{13}$$
$$261,6 \cdot k^{12} = 523,2$$
$$k = 1,05946...$$
$$k \approx 1,059$$

Jonon suhdeluku on 1,059.

b) Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$$a_n = 261,6 \cdot 1,05946...^{n-1}$$

Keski-E on jonon 5. jäsen.

Lasketaan jonon 5. jäsen.

$$a_5 = 261,6 \cdot 1,05946...^{5-1} = 329,595... \text{ Hz} \approx 330 \text{ Hz}$$

39.

a) Jonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 6,2$.

Vuoden 2015 keskilämpötila on jonon $2015 - 1994 = 21$. jäsen eli $a_{21} = 7,8$.

Aritmeettisen jonon yleisen jäsenen määrittämiseksi tarvitaan ensimmäisen jäsenen lisäksi differenssi *d*.

Muodostetaan yhtälö jonon 21. jäsenen avulla ja ratkaistaan siitä *d*.

$$\begin{aligned} a_{21} &= 7,8 \\ 6,2 + (21-1) \cdot d &= 7,8 \\ d &= \frac{2}{25} \end{aligned}$$

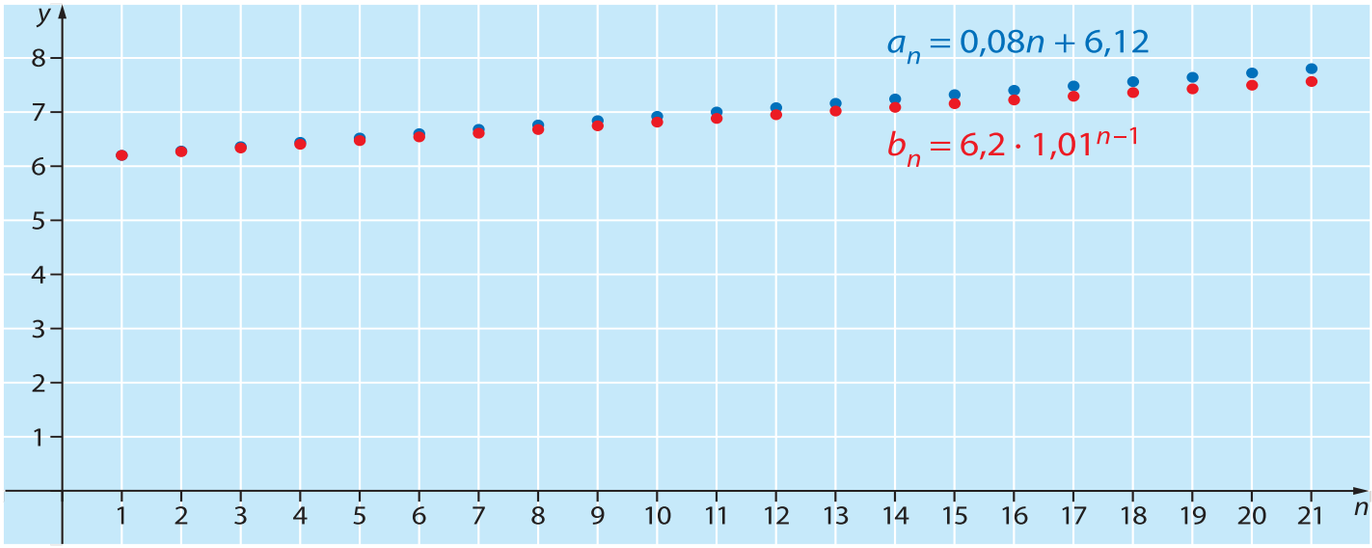
Jonon yleinen jäsen: $a_n = 6,2 + (n-1) \cdot \frac{2}{25} = \frac{2}{25} n + \frac{153}{25}$ $(°C)$

b) Ratkaistaan geometrisen jonon suhdeluku 21. jäsenen avulla.

$$\begin{aligned} b_{21} &= 7,8 \\ 6,2 \cdot q^{21-1} &= 7,8 \\ q &= 1,0115... \approx 1,01 \end{aligned}$$

Jonon yleinen jäsen: $b_n = 6,2 \cdot 1,01^{n-1}$ $(°C)$

c) Piirretään lukujonojen kuvaajat samaan koordinaatistoon.



40.

a) Idan viikoittaiset lenkkien pituudet muodostavat geometrisen jonon.

Jonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 1,2$.

Lenkkien pituuksien kasvua kuvaava prosenttikerroin on
$100\,\% + 15,0\,\% = 115\,\% = 1,15$.

Jonon yleinen jäsen on $a_n = 1,2 \cdot 1,15^{n-1}$ (km).

Kuudessa kuukaudessa on $\frac{52}{2} = 26$ viikkoa.

Lasketaan lenkin pituus kuuden kuukauden kuluttua lenkkeilyn aloittamisesta, joten lasketaan jonon 27. jäsen.

$a_{27} = 1,2 \cdot 1,15^{27-1} = 45,428... \text{ km} \approx 45 \text{ km}$

Tinon viikoittaiset lenkkien pituudet muodostavat aritmeettisen jonon.

Jonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 2,5$. Jonon differenssi $d = 0,35$.

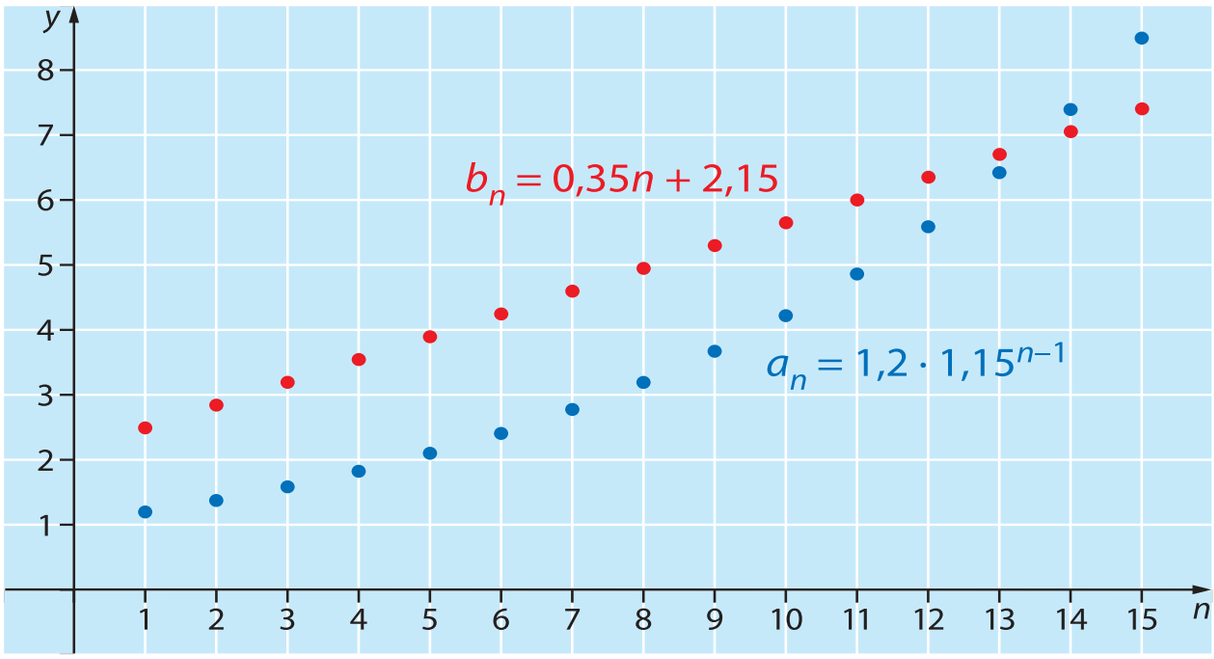
Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$b_n = 2,5 + (n-1) \cdot 0,35 = 0,35n + 2,15$ (km).

Lasketaan jonon 27. jäsen.

$b_{27} = 0,35 \cdot 27 + 2,15 = 11,6 \text{ km} \approx 12 \text{ km}$

b) Piirretään jonojen kuvaajat samaan koordinaatistoon.



Kuvaajasta nähdään, että jonon 14. jäsen on Idalla suurempi kuin Tinolla. Ida juoksee pidemmän lenkin 13 viikon kuluttua.

41.

a) Aritmeettisen jonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 25\,000$.

Lasketaan jonon differenssi jonon 12. jäsenen avulla.

$$\begin{aligned} a_{12} &= 17\,300 \\ 25\,000 + 12d &= 17\,300 \\ d &= -\frac{1925}{3} \end{aligned}$$

Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$$a_n = 25\,000 + n \cdot \left(-\frac{1925}{3} \right) = -\frac{1925}{3} n + 25\,000$$

Ratkaistaan epäyhtälö $a_n < 1\,000$

$$\begin{aligned} -\frac{1925}{3} n + 25\,000 &< 1\,000 \\ n &> 37,402... \end{aligned}$$

Pienin kokonaisluku, joka toteuttaa ehdon on 38.

Seuraavalla kuulla Elise maksaa lopun velan, joten 39 lyhennyksen jälkeen Elise on maksanut koko lainan.

b) Geometrisen jonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 25\,000$.

Lasketaan jonon suhdeluku jonon 12. jäsenen avulla.

$$\begin{aligned} a_{12} &= 17\,300 \\ 25\,000 \cdot q^{12} &= 17\,300 \\ q &= 0,9697... \end{aligned}$$

Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$$a_n = 25\,000 \cdot 0,9697...^n$$

Ratkaistaan epäyhtälö $a_n < 1\,000$.

$$\begin{aligned} 25\,000 \cdot 0,9697...^n &< 1\,000 \\ n &> 104,915... \end{aligned}$$

Pienin kokonaisluku, joka toteuttaa ehdon on 105.

Seuraavalla kuulla Elise maksaa lopun velan, joten 106 lyhennyksen jälkeen Elise on maksanut koko lainan.

42.

a) Aritmeettisen summan laskemiseen tarvitaan

- ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 63\,067$
- yhteenlaskettavien määrä $n = 2015 - 1994 = 21$
- viimeinen yhteenlaskettava $a_{21} = 55\,472$.

Lasketaan summan arvo summakaavalla.

$$S_{21} = 21 \cdot \frac{63\,067 + 55\,472}{2} = 1\,244\,659,5 \approx 1\,244\,700$$

b) Geometrisen jonon summan laskemiseen tarvitaan

- ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 63\,067$
- yhteenlaskettavien määrä $n = 2015 - 1994 = 21$
- suhdeluku q.

Suhdeluku voidaan selvittää yleisen jäsenen avulla.

- Geometrisen jonon yleinen jäsen on muotoa $a_n = 63\,067 \cdot q^{n-1}$.
- Geometrisen jonon 21. jäsen on $a_{21} = 55\,472$.

$$63\,067 \cdot q^{21-1} = 55\,472$$
$$q = \pm 0,99360...$$

Syntyvien määrä ei voi olla negatiivinen, joten $q = 0,99360\ldots$

Lasketaan geometrisen jonon 21 ensimmäisen jäsenen summa.

$$S_{21} = 63\,067 \cdot \frac{1 - 0,99360...^{21}}{1 - 0,99360...} = 1\,243\,039,698... \approx 1\,243\,000$$

43.

a) Rasmuksen jaettujen mainoslehtien määrä muodostaa aritmeettisen jonon.

Lasketaan summakaavan avulla, kuinka monen päivän kuluttua Rasmus on jakanut vähintään 5000 mainoslehteä.

Aritmeettisen summan laskemiseen tarvitaan

- ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 70$
- yhteenlaskettavien määrä n
- viimeinen yhteenlaskettava $a_n = 70 + (n-1) \cdot 65 = 65n + 5$.

$$S_n > 5\,000$$

$$n \cdot \frac{70 + (65n + 5)}{2} > 5\,000$$

$$n < -12,993 \text{ tai } n > 11,8399...$$

Pienin positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa ehdon, on 12, joten 12 päivän kuluttua Rasmus saa jaettua mainoslehtiset.

b) Lasketaan jonon 11. jäsen. $a_{11} = 65 \cdot 11 + 5 = 720$.

Lasketaan, kuinka monta mainoslehtistä Rasmus oli jakanut 11 ensimmäisenä päivänä.

$$S_{11} = 11 \cdot \frac{70 + 720}{2} = 4\,345$$

Viimeisenä päivänä Rasmus jakoi $5000 - 4345 = 655$ mainoslehtistä.

44.

Pallon kulkemat matkat alaspäin eri ponnahduksilla muodostaa geometrisen jonon.

- Jonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 1$.
- Jonon suhdeluku on $q = 0,8$.
- Yhteenlaskettavien jäsenien määrä on $n = 10$.

Lasketaan 10 ensimmäisen jäsenen summa.

$$S_{10} = 1 \cdot \frac{1 - 0,8^{10}}{1 - 0,8} = 4,4631... \text{ (m)}$$

Pallon kulkemat matkat ylöspäin eri ponnahduksilla muodostaa geometrisen jonon.

- Jonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 1 \cdot 0,8 = 0,8$.
- Jonon suhdeluku on $q = 0,8$.
- Yhteenlaskettavien jäsenien määrä on $n = 9$.

Lasketaan 9 ensimmäisen jäsenen summa.

$$S_9 = 0,8 \cdot \frac{1 - 0,8^9}{1 - 0,8} = 3,46312... \text{ (m)}$$

Lasketaan pallon kulkema matka yhteensä.

$$4,4631... + 3,46312... = 7,92622... \text{ m} \approx 7,9 \text{ m}$$

45.

a) Minkan tädiltään saama syntymäpäivälahjan suuruus vuosittain muodostaa geometrisen jonon.

- Jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 500$
- Jonon suhdeluku $100\,\% + 8,5\,\% = 108,5\,\% = 1,085$
- Jonon yleinen jäsen $a_n = 500 \cdot 1,085^{n-1}$ (€)

Lasketaan jonon 18 – 7 = 11. jäsen.

$$a_{11} = 500 \cdot 1,085^{11-1} = 1130,4917... \text{ €} \approx 1130 \text{ €}$$

b) Lasketaan 18. ensimmäisen jäsenen summa.

$$S_{11} = 500 \cdot \frac{1-1,085^{11}}{1-1,085} = 8548,041... \text{ €} \approx 8548 \text{ €}$$

c) Ratkaistaan epäyhtälö $S_n > 15\,000$.

$$500 \cdot \frac{1-1,085^{n}}{1-1,085} > 15\,000$$

$$n > 15,530...$$

Pienin positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa ehdon on 16.

Silloin Minka on $7 + 16 = 23$ -vuotias.

5.3 Monivalintatehtävät

1.

Riippuvuutta kuvaa yhtälö $y = x + 1$. Sijoittamalla yhtälöön taulukoidut arvot yhtälöt pätevät kaikki.

$y = x + 1 \quad | \; y = -1 \text{ ja } x = -2$

$-1 = -2 + 1$

$-1 = -1$

tosi

$y = x + 1 \quad | \; y = 0 \text{ ja } x = -1$

$0 = -1 + 1$

$0 = 0$

tosi

$y = x + 1 \quad | \; y = 2 \text{ ja } x = 1$

$2 = 1 + 1$

$2 = 2$

tosi

Oikea vastausvaihtoehto on c.

2.

Tarkastelun alussa kaupassa oli 50 asiakasta, joten $y = 50$, kun $t = 0$.

Kaupan asiakasmäärä kasvaa tunnissa 30 asiakkaalla, joten riippuvuutta kuvaavassa yhtälössä kulmakerroin on 30.

Asiakasmäärän y riippuvuutta ajasta t (h) tarkastelun alusta lukien kuvaa yhtälö $y = 50 + 30t$.

Oikea vastausvaihtoehto on b.

3.

Muodostetaan suoran yhtälö.

$$y-(-1)=3\cdot(x-0)$$
$$y+1=3x$$
$$y=3x-1$$

Oikea vastausvaihtoehto on c.

4.

Muutetaan suoran yhtälö ratkaistuun muotoon.

$$\begin{aligned} 2y - 5x &= 3 \\ 2y &= 5x + 3 \qquad \big| : 2 \\ y &= \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Oikea vastausvaihtoehto on b.

5.

Lasketaan suoran kulmakerroin.

$$k = \frac{2-(-1)}{4-3} = \frac{2+1}{1} = \frac{3}{1} = 3$$

Oikea vastausvaihtoehto on c.

6.

Muodostetaan suoran yhtälö.

$$y-(-1)=-2\cdot(x-3)$$
$$y+1=-2x+6$$
$$y+2x-5=0$$

Oikea vastausvaihtoehto on c.

7.

Suoran $y = -2x + 5$ kulmakerroin on $k = -2$.

Suorat ovat yhdensuuntaisia, kun niiden kulmakertoimet ovat samat.

Suoran $y = -2x - 1$ kulmakerroin on $k = -2$.

Oikea vastausvaihtoehto on b.

8.

Suoran $y = -3x + 1$ kulmakerroin on -3.

Suoran ja sen normaalin kulmakertoimien tulo on -1.

Merkitään normaalin kulmakerrointa kirjaimella k.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se.

$$k \cdot (-3) = -1 \qquad \big| : (-3)$$

$$k = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

Suoran $y = \frac{1}{3}x - 1$ kulmakerroin on $k = \frac{1}{3}$.

Oikea vastausvaihtoehto on c.

9.

Sijoitetaan $t = 1$ funktioon m.

$$m(1) = 120 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 120 \cdot \frac{1}{2} = 60 \text{ (g)}$$

Oikea vastausvaihtoehto on b.

10.

Korkoprosentti voidaan päätellä funktion f suhdeluvusta 1,0015.

$$1,0015 - 1 = 0,0015 = 0,15\ \%$$

Oikea vastausvaihtoehto on b.

11.

Epäpuhtauksien määrä eri puhdistuskerroilla muodostaa geometrisen jonon.

- Jonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 5$.
- Jonon suhdeluku on $q = 100\,\% - 15\,\% = 85\,\% = 0,85$.

Jonon yleinen jäsen on $a_n = 5 \cdot 0,85^x$.

Oikea vastausvaihtoehto on b.

12.

$$
\begin{aligned}
4^{x-1} &= 2^{3x} \\
(2^2)^{x-1} &= 2^{3x} \\
2^{2x-2} &= 2^{3x} \\
2x-2 &= 3x \\
x &= -2
\end{aligned}
$$

Oikea vastausvaihtoehto on a.

13.

Eksponenttiyhtälön $e^x - 3 = 0$ ratkaisu on

$$e^x - 3 = 0$$
$$e^x = 3$$
$$x = \ln 3$$

Oikea vastausvaihtoehto on a.

14.

$$x^3 = -64$$
$$x = \sqrt[3]{-64}$$
$$x = -4$$

Oikea vastausvaihtoehto on c.

15.

Kuvaajan mukaan $f(x) = 80$, kun $x \approx -3$ tai $x \approx 3$.

Oikea vastausvaihtoehto on c.

16.

Jonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = -5$.

Jonon differenssi on $d = -7 - (-5) = -7 + 5 = -2$.

Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$a_n = -5 + (n-1) \cdot (-2) = -5 - 2n + 2 = -2n - 3$

Oikea vastausvaihtoehto on b.

17.

Geometrisen jonon $a_n = -5 \cdot 3^{n-1}$ suhdeluku on $q = 3$.

Suhdeluku on peräkkäisten jäsenten suhde.

Oikea vastausvaihtoehto on a.

18.

Summassa $\sum_{n=3}^{25}(20n-5)$ on yhteenlaskettavia $n = 25-2 = 23$.

Oikea vastausvaihtoehto on c.

19.

Jono -3, -1, 1, …, 25 on aritmeettinen jono, jonka differenssi on $d = -1-(-3) = -1+3 = 2$.

Jonon yleinen jäsen on $a_n = -3+(n-1)\cdot 2 = 2n-3-2 = 2n-5$.

Lasketaan, monesko jonon jäsen 25 on.

$$\begin{aligned} a_n &= 25 \\ 2n-5 &= 25 \\ 2n &= 30 \qquad \big| : 2 \\ n &= 15 \end{aligned}$$

Oikea vastausvaihtoehto on b.

20.

Aritmeettisen jonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = -7$.

Jonon differenssi on $d = -10 - (-7) = -10 + 7 = -3$.

Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$a_n = -7 + (n-1) \cdot (-3) = -7 - 3n + 3 = -3n - 4$

Ratkaistaan epäyhtälö $a_n > -154$.

$$\begin{aligned} -3n - 4 &> -154 \\ -3n &> -150 \qquad \big| : (-3) \\ n &< 50 \end{aligned}$$

Suurin positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa ehdon on 49.

Oikea vastausvaihtoehto on c.

21.

Sijoitetaan $y = 150$ yhtälöön $y = 15x - 215$.

$$150 = 15x - 215$$
$$15x = 365 \qquad |:15$$
$$x = 24,3333...$$
$$x \approx 24,3$$

Oikea vastausvaihtoehto on a.

22.

Sijoitetaan annetun pisteen koordinaatit suoran yhtälöön ja ratkaistaan vakio a.

$$4 \cdot (-10) - 5a \cdot 19 + 2 = 0$$
$$-40 - 95a + 2 = 0$$
$$95a = -38 \qquad \big| : 95$$
$$a = -\frac{2}{5}$$

Oikea vastausvaihtoehto on b.

23.

Suoran l ja normaalin kulmakertoimien tulo on -1.

Normaalin $y = -5x + 6$ kulmakerroin on $k = -5$.

Merkitään suoran l kulmakerrointa kirjaimella k. Lasketaan suoran l kulmakerroin.

$$-5 \cdot k = -1 \qquad \left| : (-5) \right.$$

$$k = \frac{-1}{-5} = \frac{1}{5}$$

Muodostetaan yhtälö suoran l kulmakertoimen ja annettujen pisteiden avulla ja ratkaistaan siitä a.

$$\frac{-3-(-1)}{(a+2)-2} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{-3+1}{a+2-2} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{-2}{a} = \frac{1}{5}$$

$$a = -10$$

Oikea vastausvaihtoehto on b.

24.

Suoran $y = -2x - 5$ kulmakerroin on $k = -2$.

Yhdensuuntaisten suorien kulmakertoimet ovat samat, joten suoran s kulmakerroin on $k = -2$.

Muodostetaan yhtälö suoran s kulmakertoimen ja annettujen pisteiden avulla ja ratkaistaan siitä c.

$$\frac{2-4}{2c-(c-3)} = -2$$

$$\frac{-2}{c+3} = -2$$

$$-2 = -2(c+3)$$

$$-2 = -2c - 6$$

$$-2c = 4 \qquad \vert : (-2)$$

$$c = -2$$

Oikea vastausvaihtoehto on b.

25.

Suora leikkaa x-akselin, kun $y = 0$

Sijoitetaan $y = 0$ suoran yhtälöön.

$$2 \cdot 0 - 3x + 5 = 0$$

$$3x = 5 \qquad \left| : 3 \right.$$

$$x = \frac{5}{3}$$

Suora leikkaa x-akselin pisteessä $\left(\frac{5}{3}, 0 \right)$.

Oikea vastausvaihtoehto on b.

26.

Kun mainostukseen käytettyjä varoja vähennettiin puoleen, mainostukseen käytettiin $\frac{1\,000\ €}{2} = 500\ €$.

Riippuvuutta kuvaavan suoran yhtälön kulmakerroin on

$$k = \frac{92\,000 - 70\,000}{1\,000 - 500} = \frac{22\,000}{500} = 44.$$

Muodostetaan suoran yhtälö.

$$y - 70\,000 = 44(x - 500)$$
$$y - 70\,000 = 44x - 22\,000$$
$$y = 44x + 48\,000$$

Oikea vastausvaihtoehto on a.

27.

Vuonna 1955 on kulunut vuosia $1955 - 1900 = 55$.

Lasketaan funktion p arvo kohdassa $t = 55$.

$$p(55) = 2\,745\,000 \cdot e^{0{,}007 \cdot 55} = 4\,034\,091{,}312... \approx 4\,030\,000$$

Oikea vastausvaihtoehto on a.

28.

$$1,9 \cdot 0,72^{x} = 0,51$$

$$x = 4,003...$$

$$x \approx 4$$

Oikea vastausvaihtoehto on b.

29.

Sijoitetaan $y = 1000$ yhtälöön $y = 8043 \cdot e^{-0,1997x}$.

$$1000 = 8043 \cdot e^{-0,1997x}$$
$$x = 10,439$$
$$x \approx 10,44$$

Oikea vastausvaihtoehto on b.

30.

Merkitään kofeiinin alkuperäistä massaa kirjaimella a.

Kofeiinin määrä on $\frac{1}{2}a$, kun se on puolittunut.

Kofeiinin määrä eri tunteina muodostaa geometrisen jonon.

Jonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = a$ ja kuudes jäsen on $a_6 = \frac{1}{2}a$.

Jonon yleinen jäsen on $a_n = a \cdot q^n$

Muodostetaan jonon yleisen jäsenen avulla ja jonon 6. jäsenen avulla yhtälö ja ratkaistaan siitä suhdeluku q.

$$a_6 = \frac{1}{2}a$$

$$a \cdot q^6 = \frac{1}{2}a$$

$$q = 0,8908...$$

Kofeiinin määrä vähenee tunnissa
$1 - 0,8908... = 0,10910... = 10,910...\,\% \approx 11\,\%$.

Oikea vastausvaihtoehto on b.

31.

Merkitään lääkeannoksen alkuperäistä massaa kirjaimella a.

Lääkeannoksen määrä on $a - 0,45a = 0,55a$, 20 tunnin jälkeen.

Lääkeannoksen määrä eri tunteina muodostaa geometrisen jonon.

Jonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = a$ ja 20. jäsen on $a_{20} = 0,55a$.

Jonon yleinen jäsen on $a_n = a \cdot q^n$

Muodostetaan jonon yleisen jäsenen avulla ja jonon 20. jäsenen avulla yhtälö ja ratkaistaan siitä suhdeluku q.

$$\begin{aligned} a_{20} &= 0,55a \\ a \cdot q^{20} &= 0,55a \\ q &= 0,97055... \end{aligned}$$

Kofeiinin määrä vähenee tunnissa
$1 - 0,97055... = 0,02944... = 2,944...\,\% \approx 2,9\,\%$.

Oikea vastausvaihtoehto on c.

32.

Kunnan asukasluku eri vuosina muodostaa geometrisen jonon.

Jonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 11\,780$ ja suhdeluku
$q = 100\,\% - 2,75\,\% = 97,25 = 0,9725$.

Jonon yleinen jäsen on $a_n = 11\,780 \cdot 0,9725^{n-1}$.

Ratkaistaan epäyhtälö $a_n < 8000$.

$$11\,780 \cdot 0,9725^{n-1} < 8000$$
$$n > 14,8769...$$

Ensimmäinen positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa ehdon on 15.

Tuolloin vuosi on $2010 + 15 = 2025$.

Oikea vastausvaihtoehto on b.

33.

Tilillä oleva rahamäärä muodostaa geometrisen jonon, jonka

- ensimmäinen jäsen on $a_1 = 950$
- suhdeluku on $q = 1,0025$
- yleinen jäsen on $a_n = 950 \cdot 1,0025^{n-1}$

Lasketaan jonon 5. jäsen.

$a_5 = 950 \cdot 1,0025^{5-1} = 959,535.. € \approx 959,54 €$

Oikea vastausvaihtoehto on a.

34.

Aritmeettisen summan ratkaisemiseksi tarvitaan

- ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 15 \cdot 1 + 33 = 48$
- viimeinen yhteenlaskettava $a_{100} = 15 \cdot 100 + 33 = 1\,533$
- yhteenlaskettavien määrä $n = 100$.

Lasketaan sadan ensimmäisen jäsenen summa summakaavan avulla.

$$S_{100} = 100 \cdot \frac{48 + 1\,533}{2} = 79\,050$$

Oikea vastausvaihtoehto on c.

35.

Summan $\sum_{n=4}^{15}\left(\frac{1}{2}\cdot 4^{n-1}\right)$ ensimmäinen yhteenlaskettava on jonon $a_n = \frac{1}{2}\cdot 4^{n-1}$ neljäs jäsen.

Lasketaan jonon $a_n = \frac{1}{2}\cdot 4^{n-1}$ neljäs jäsen.

$$a_4 = \frac{1}{2}\cdot 4^{4-1} = 32$$

Oikea vastausvaihtoehto on b.

36.

Jono $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{9}{4}, ..., \frac{2187}{4}$ on geometrinen jono.

Jonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = \frac{1}{4}$ ja suhdeluku on $q = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}} = 3$.

Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$$a_n = \frac{1}{4} \cdot 3^{n-1}$$

Lasketaan, kuinka mones jonon jäsen $\frac{2187}{4}$ on.

$$a_n = \frac{2187}{4}$$
$$\frac{1}{4} \cdot 3^{n-1} = \frac{2187}{4}$$
$$n = 8$$

Oikea vastausvaihtoehto on b.

37.

Maalattujen lautojen määrä eri päivinä muodostaa aritmeettisen jonon.

- Jonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 29$.
- Jonon differenssi on $d = 6$.
- Jonon yleinen jäsen on $a_n = 29 + (n-1) \cdot 6 = 6n + 23$.

Lasketaan jonon 7. jäsen.

$a_7 = 6 \cdot 7 + 23 = 65$

Oikea vastausvaihtoehto on b.

38.

Poimittujen marjojen määrä muodostaa aritmeettisen jonon.

- Jonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 29$.
- Jonon differenssi on $d = 6$.
- Jonon yleinen jäsen on $a_n = 29 + (n-1) \cdot 6 = 6n + 23$.

Lasketaan jonon 7. jäsen.

$a_7 = 6 \cdot 7 + 23 = 65$

Muodostetaan seitsemän ensimmäisen jäsenen summa summakaavan avulla.

$$S_7 = 7 \cdot \frac{29 + 65}{2} = 329$$

Oikea vastausvaihtoehto on c.

230. c) Ratkaise yhtälö y:n suhteen.

233. Pyöristä vasta laskettuasi kulmien erotus.

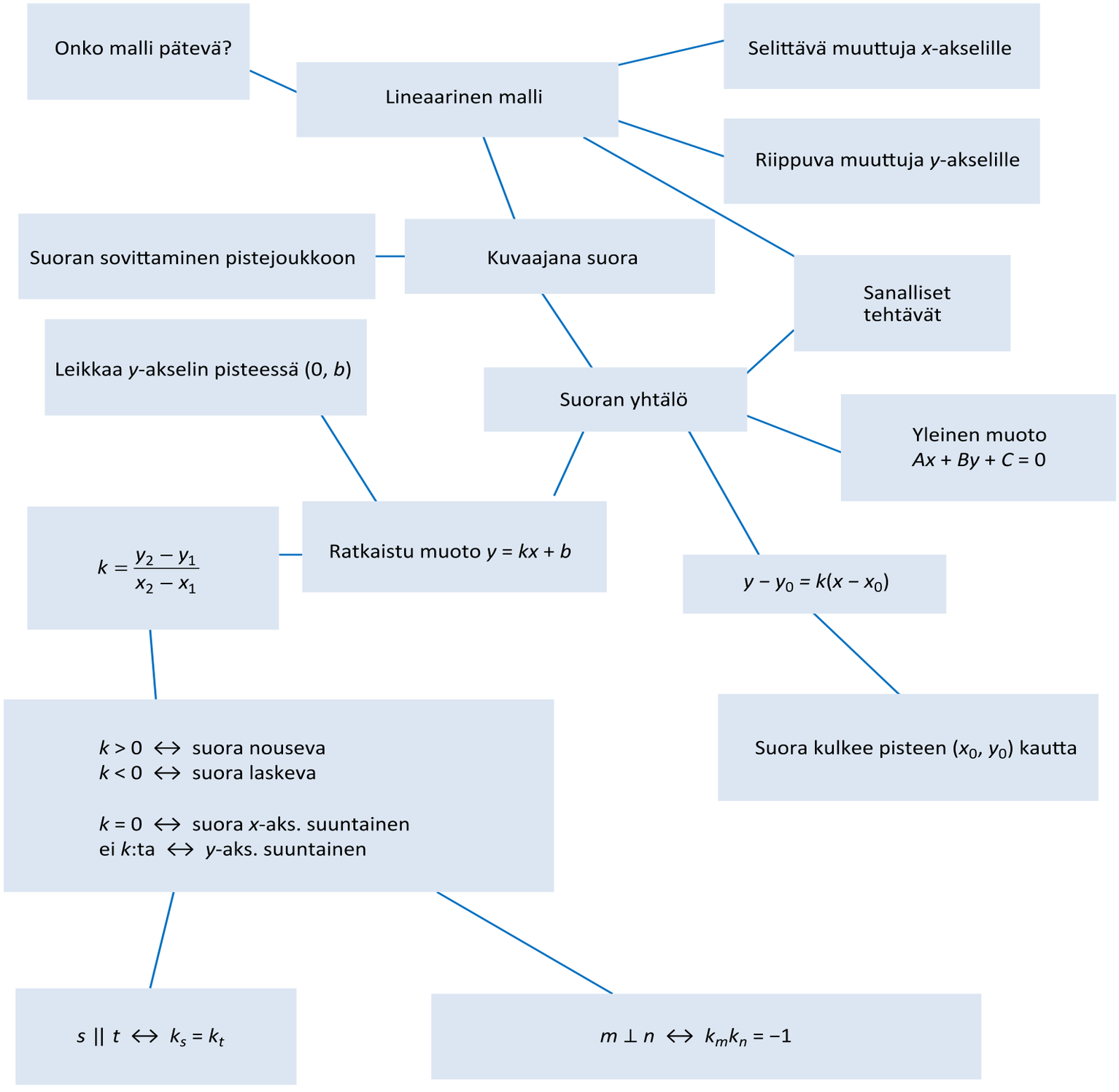
236. Kirjoita ensin juurrettava potenssin avulla ja muuta juurimerkintä sitten murtopotenssiksi.

238. Kirjoita murtopotenssit ensin juurimuotoon ja korota sitten juurrettava osoittajan mukaiseen potenssiin.

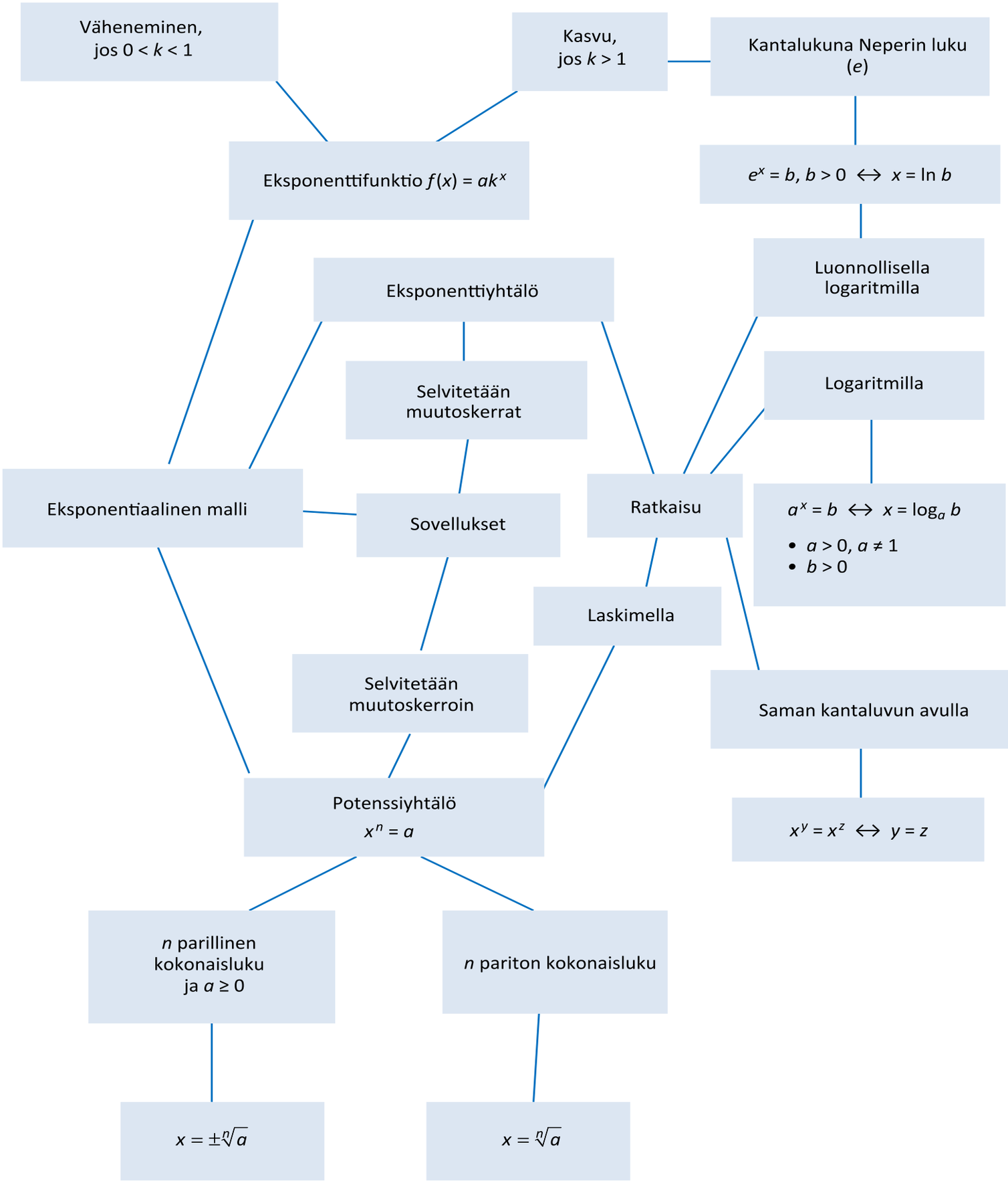
240. a) Sijoita annettu oksoniumionikonsentraatio [H_3O^+]:n paikalle.

241. b) Selvitä energia, joka vapautui Koben järistyksessä. Vertaa Sendain järistyksessä vapautunutta energiaa Koben järistyksessä vapautuneeseen energiaan.

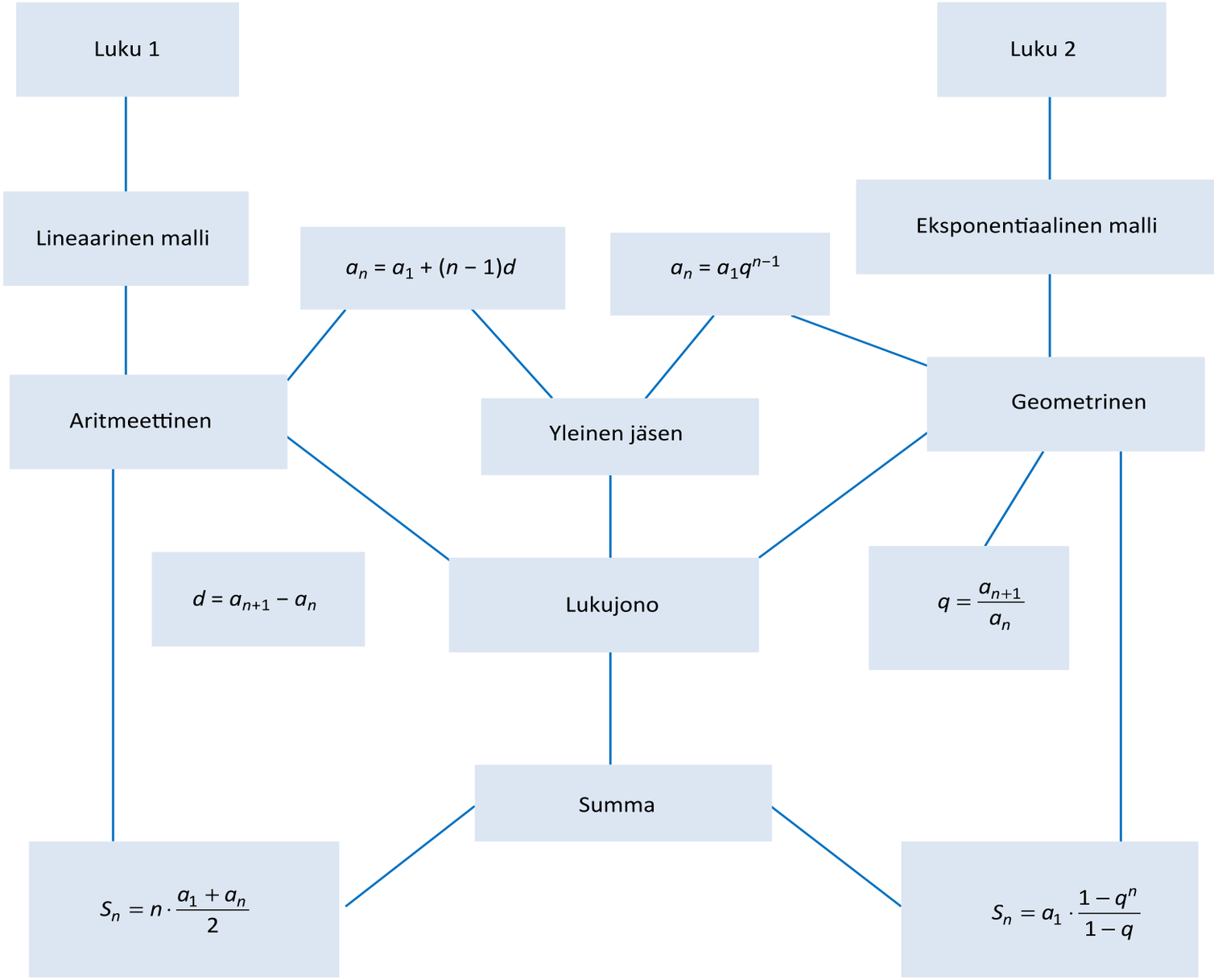
1. Lineaarinen malli



2. Eksponentiaalinen malli



3. Lukujonot matemaattisena mallina



Keskeiset asiat 1.1

- Lineaarisesti riippuvien suureiden kuvaaminen koordinaatistossa
  - Kumpi suure on riippuva (y-akselille) ja kumpi selittävä (x-akselille)
- Suureen x ratkaiseminen, kun suoran yhtälö ja suure y tunnetaan
- Suureen y ratkaiseminen, kun suoran yhtälö ja suure x tunnetaan
- Suoran sovittaminen pistejoukkoon
- Lineaarisen mallin pätevyyden arviointi

Keskeiset asiat 1.2

- Suora kulkee pisteiden (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) kautta
  - Kulmakertoimen muodostaminen
- Suoran yhtälön ratkaistu ja yleinen muodon määrittäminen
  - Kulkusuunnan päätteleminen kulmakertoimen avulla
  - Koordinaattiakselien leikkauspisteiden määrittäminen
  - Toteuttaako piste suoran yhtälön eli onko piste suoralla

Keskeiset asiat 1.3

- Milloin suorat ovat
  - yhdensuuntaisia
  - kohtisuorassa toisiaan vastaan
- Suorien leikkauspisteen määrittäminen

Keskeiset asiat 1.4

- Suoran yhtälön muodostaminen sanallisessa tehtävässä

Keskeiset asiat 2.1

- Eksponentiaalisen mallin tunnistaminen
  - kasvu, jos muutoskerroin $k > 1$
  - väheneminen, jos muutoskerroin $0 < k < 1$
- Eksponenttifunktion muodostaminen
- Funktion kuvaajan piirtäminen ja tulkitseminen
- Neperin luvun käyttäminen

Keskeiset asiat 2.2

- Eksponenttiyhtälön muodostaminen
- Eksponenttiyhtälön ratkaiseminen
  - saman kantaluvun avulla, jos mahdollista
  - kuvaajan avulla
  - logaritmin avulla
  - laskimen Ratkaise yhtälö -toiminnon avulla

Keskeiset asiat 2.3

- Potenssiyhtälön tunnistaminen
- Potenssiyhtälön ratkaiseminen yleisen juuren avulla
  - Eksponentin vaikutus ratkaisujen lukumäärään
    - » Parittomalla eksponentilla on aina ratkaisu reaalilukujen joukossa.
    - » Parillisella eksponentilla ei ole aina ratkaisua reaalilukujen joukossa.
- Prosentuaalisen muutoksen päätteleminen prosenttikertoimesta

Keskeiset asiat 2.4

- Eksponentiaalisen mallin muodostaminen sanallisesta tehtävästä
- Eksponentti- ja potenssiyhtälön tunnistaminen sanallisesta tehtävästä

Keskeiset asiat 3.1

- Lukujonon merkintöjen kertaaminen
- Aritmeettisen ja geometrisen jonon tunnistaminen
- Lukujonon yleisen jäsenen muodostaminen
- Lukujonon piirtäminen

Keskeiset asiat 3.2

- Aritmeettisen summan tunnistaminen
- Aritmeettisen summan laskeminen
  - ilman laskinta
  - laskimella
- Aritmeettisen summan jäsenistä muodostuvan lukujonon mallintaminen laskimella

Keskeiset asiat 3.3

- Geometrisen summan tunnistaminen
- Geometrisen summan laskeminen laskimella
- Geometrisen summan jäsenistä muodostuvan lukujonon mallintaminen laskimella

Keskeiset asiat 4.1

- Suuntakulman käsitteen ymmärtäminen
- Suuntakulman laskeminen
  - suoran pisteiden avulla
  - suoran yhtälön avulla
- Suorien välisen kulman laskeminen

Keskeiset asiat 4.2

- Murtopotenssin merkinnän ymmärtäminen
- Juuren muuttaminen murtopotenssiin
- Murtopotenssin muuttaminen juurimuotoon

Keskeiset asiat 4.3

- Briggsin logaritmin eli kymmenkantaisen logaritmin ymmärtäminen

Keskeiset asiat 4.3

- Briggsin logaritmin eli kymmenkantaisen logaritmin ymmärtäminen